



Università degli Studi di Pisa

---

FACOLTÀ DI SCIENZE MATEMATICHE FISICHE E NATURALI  
Corso di Laurea Magistrale in Fisica

TESI DI LAUREA MAGISTRALE

# Studio in Termini di Stabilità Dinamica della Catastrofe Gravotermica

Candidato:  
Mattia Carlo Sormani

Relatore:  
Chiarissimo Professore Giuseppe Bertin

---

Anno Accademico 2011–2012

Al Suin

## Sommario

Gli ammassi globulari sono una classe di sistemi astrofisici costituiti da un grande numero di stelle, tipicamente dell'ordine del milione, che interagiscono tra loro prevalentemente attraverso la forza gravitazionale. Si tratta di sistemi autogravitanti legati, di forma approssimativamente sferica. Gli ammassi globulari sono tra le prime strutture formatesi nella nostra Galassia; galassie esterne, come M31 e M87, sono dotate di sistemi di ammassi globulari di cui abbiamo cominciato a studiare le proprietà. Fino a poco tempo fa si riteneva che la maggior parte delle stelle negli ammassi globulari fossero di fatto nate contemporaneamente e in ambiente omogeneo, così che le loro popolazioni stellari, particolarmente semplici, sono state utilizzate come un laboratorio semplice per lo studio dell'evoluzione stellare. In realtà studi recenti hanno mostrato che il quadro generale, a questo riguardo, è ben più complesso. Dal punto di vista della dinamica, gli ammassi globulari si distinguono dai sistemi stellari più grandi, come le galassie, per aver un'età spesso più grande del tempo-scala caratteristico degli incontri stella-stella; pertanto si ritiene che questi sistemi non siano molto lontani da condizioni di rilassamento termodinamico (anche se su tempi scala dell'ordine di un centinaio di milioni di anni possono essere studiati come sistemi stellari non-collisionali). Si noti come la collisionalità sia responsabile di tre principali classi di fenomeni: la segregazione di massa, l'evaporazione, e il collasso del nucleo. Nella Tesi ci occuperemo principalmente del problema del collasso e toccheremo solo in parte il problema della segregazione di massa.

In prima approssimazione, nel contesto dinamico, gli ammassi globulari si possono quindi considerare come un sistema idealizzato di  $N$  masse puntiformi che interagiscono tra loro unicamente tramite l'interazione gravitazionale. Il grado di collisionalità relativamente alto in questi sistemi ha suggerito di utilizzare, per descriverne gli stati di equilibrio, metodi termodinamici. Purtroppo, la termodinamica dei sistemi autogravitanti, a causa del lungo raggio di azione delle forze tra le particelle, non è stata ancora fondata in modo completamente soddisfacente (ad esempio, la funzione di partizione dell'ensemble canonico risulta divergente). I metodi propri della fisica dei plasmi elettromagnetici, anch'essi soggetti a forze a lungo raggio, hanno solo applicazioni limitate nel caso di sistemi autogravitanti, in quanto per i sistemi stellari viene meno l'effetto di schermaggio a lunghe distanze (che risolve vari problemi concettuali relativi alla descrizione dei plasmi formati da ioni e elettroni) a causa del fatto che la forza gravitazionale è solo attrattiva.

Per quanto sopra indicato e nonostante alcune difficoltà concettuali di fondo, lo studio di equilibrio e stabilità di piccoli sistemi stellari sferoidali, come gli ammassi globulari, è tradizionalmente fondato su una trattazione termodinamica (di tentativi di descrizione di "gas di stelle" in questi termini si trova traccia fin dai tempi di Poincaré). In particolare, su questa linea si sviluppa un lungo filone di lavori classici, i cui capostipiti sono un lavoro di Antonov [1] e uno di Lynden-Bell & Wood [24], che analizzano gli equilibri di gas di stelle autogravitanti nella cosiddetta approssimazione di campo medio, che trascura le correlazioni tra le particelle (la dinamica di tali sistemi è descritta dall'equazione di Boltzmann non-collisionale); questi lavori riprendono alcune idee sviluppate negli anni '50 per lo studio di sistemi autogravitanti confinati propriamente gassosi e comunemente associati allo studio dei processi di formazione stellare. Gli autori trovano che un gas isoterma autogravitante in determinate condizioni dovrebbe essere instabile e collassare. Da Lynden-Bell & Wood in poi ciò si è trasformato in un paradigma che va sotto il nome di catastrofe gravotermica (si veda anche [32]). In generale, viene riconosciuto che l'instabilità si sviluppa solo in presenza di collisionalità, anche se alcuni degli argomenti termodinamici addotti non tengono conto esplicitamente di questo fatto. Per di più alcuni degli argomenti termodinamici in

questione, come il metodo delle serie lineari di Poincaré, non indicano il tempo-scala in cui la catastrofe dovrebbe attuarsi. In ogni caso, il paradigma ha avuto un impatto enorme in ambito astronomico, visto che ammassi globulari che risultano troppo concentrati per rientrare nel quadro descrittivo dei modelli di King (come M15) vengono comunemente indicati come ammassi che hanno subito il collasso del core (ovvero hanno subito la catastrofe); inoltre il fenomeno della catastrofe negli ammassi globulari è stato studiato tramite numerose simulazioni numeriche dedicate. Un aspetto importante di questo tema dal punto di vista astrofisico è costituito dall'identificazione dei processi che possono a livello nonlineare fermare il collasso del nucleo. Vista l'importanza del fenomeno e del quadro interpretativo collegato, è auspicabile un metodo alternativo a quello termodinamico per analizzare la catastrofe gravotermica, che poggi su basi fisiche più semplici e meglio consolidate.

Scopo principale di questa Tesi è appunto una rielaborazione della catastrofe gravotermica che prescindendo, per quanto è possibile, dalla trattazione termodinamica. Vedremo infatti che è possibile riottenere i principali risultati dell'analisi di Lynden-Bell & Wood con un approccio che si basa sull'idrodinamica di un fluido isoterma comprimibile (in letteratura, di questo approccio abbiamo trovato traccia solo in [7], [8]). L'unico (debole) collegamento con la termodinamica, in questo schema, è la temperatura, che viene considerata semplicemente come un parametro che caratterizza l'equazione di stato. Nella Tesi viene dimostrato che l'approccio idrodinamico conferma i risultati dell'approccio termodinamico ma al contempo, evitando l'uso di ipotesi non completamente chiare, mette in luce le caratteristiche principali che stanno alla base della catastrofe gravotermica. Un ulteriore vantaggio dell'approccio idrodinamico è che esso permette di studiare non solo il punto in cui si innesca l'instabilità (la cosiddetta condizione di stabilità marginale), ma anche le situazioni non marginali e l'evoluzione successiva del sistema. L'approccio idrodinamico è inoltre generalizzabile, al pari di quello termodinamico, ai casi in cui il potenziale di interazione è diverso da quello gravitazionale.

La Tesi è strutturata come segue. Il primo capitolo consiste in un'introduzione di carattere generale in cui vengono introdotte le tematiche principali e vengono evidenziate le ipotesi su cui poggiano i modelli gassosi. Tali ipotesi vengono confrontate con le situazioni reali degli ammassi globulari e col modello idrodinamico, con particolare attenzione ai tempi caratteristici. Vengono sollevate diverse questioni tuttora aperte, la cui discussione viene ripresa nel capitolo finale. Nel secondo capitolo si definiscono e si studiano gli stati di equilibrio della sfera isoterma a due componenti (questo per tenere conto in forma semplice di un'eventuale segregazione di massa presente nel sistema; ovviamente, il caso di una componente è contenuto nella trattazione come caso particolare). Nel terzo capitolo, che costituisce il nucleo della tesi, si studia in dettaglio la stabilità del sistema utilizzando l'approccio fluidodinamico (il contributo originale della tesi riguarda principalmente questa parte). Questo viene messo a confronto con l'approccio termodinamico (ricostruendo tramite rielaborazione personale i risultati degli studi classici citati), evidenziando la sostanziale equivalenza dei due metodi nell'identificare i punti di stabilità marginale. Sorprendentemente, una parte consistente dello studio idrodinamico può essere svolta con metodi analitici; nei casi in cui ciò non risultasse possibile si è fatto ricorso a metodi numerici. Sia la parte analitica che la parte numerica coinvolgono lo studio di equazioni differenziali agli autovalori (in alcuni casi riconducibili a un'equazione tipo Schrödinger) ed equazioni integrali agli autovalori. Tra i vari spunti proposti da questa Tesi, è di particolare interesse quello di simulare tramite un termine aggiuntivo nell'energia un fattore fisico che abbia come conseguenza quella di inibire il collasso quando il sistema, contraendosi, si scalda oltre un certo limite. Questo viene messo in relazione con

la nozione comunemente accettata che il collasso gravotermico può essere fermato dalla generazione di energia dovuta alla formazione di stelle binarie nelle parti più dense centrali degli ammassi globulari. Una parte del capitolo è dedicato allo studio della stabilità per il caso a due componenti (uno studio recente di questo tema, basato essenzialmente su simulazioni numeriche, è quello presentato in [5]); anche qui si mostra l'equivalenza tra i due approcci (termodinamico e idrodinamico) in relazione all'identificazione dei punti di stabilità marginale. L'ultimo capitolo contiene una discussione che riprende quella del primo capitolo e, alla luce dei risultati ottenuti, fornisce alcuni spunti per interpretare il diverso comportamento di sistemi collisionali da quello di sistemi strettamente non-collisionali: in particolare, viene evidenziato il possibile ruolo svolto dalla conservazione dettagliata del momento angolare nell'inibire la catastrofe gravotermica in sistemi strettamente non-collisionali. Vengono infine messi in rilievo alcuni aspetti interessanti non ancora completamente chiari, che potrebbero essere oggetto di sviluppi successivi alla Tesi.



# Ringraziamenti

Ringrazio Giuseppe Bertin, il mio relatore, per avermi fatto conoscere questo argomento affascinante, per la sua presenza costante, le belle discussioni, i moltissimi spunti e l'attenzione con cui ha seguito il mio lavoro.

Ringrazio Steve per essere stato fonte di ispirazione, per avermi fatto pensare, per le numerose discussioni e i preziosi suggerimenti, e per avermi ascoltato.

Ringrazio il Bolzo, Ecomorg e Soba perché senza il loro appoggio, la loro vicinanza, la loro pazienza, la loro amicizia e la loro voglia di capire le cose profondamente non avrei imparato nulla in questi anni. Crescere intellettualmente assieme a persone così straordinarie, con l'incredibile affiatamento che c'è stato, è un'esperienza inestimabile.

Ringrazio i miei compagni d'anno Lauren, Man, Simo, Camilla, l'Alf, Grilli, Reca, il Barat, Maria, Eleonora, Ceratti, LeVip, Roberto, Ilario, Il Marche, De Capua e (ebbene sì) Denis per l'amicizia e per l'inesauribile scambio di idee che mi ha arricchito durante il percorso universitario (e i ninnoli di Lauren che hanno arricchito anche il mio gusto estetico).

Ringrazio Gdp per le domande (e le risposte).





# Indice

<b>1</b>	<b>Introduzione</b>	<b>1</b>
1.1	La Catastrofe Gravotermica e le Oscillazioni Gravotermiche . . . . .	1
1.2	Cenni sugli Ammassi Globulari. Paragone coi Sistemi Gassosi . . . . .	3
1.3	Un Approccio Dinamico alla Catastrofe Gravotermica . . . . .	8
1.4	Ruolo della Presenza di Uno Spettro di Masse . . . . .	9
1.5	Struttura della Tesi . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Sfera Isoterma a Due Componenti</b>	<b>11</b>
2.1	Analisi Matematica e Formule di Riferimento . . . . .	11
2.1.1	Introduzione . . . . .	11
2.1.2	Equazioni Generali . . . . .	12
2.1.2.1	Forma Asintotica della Soluzione all'Equazione di Emden Modificata . . . . .	17
2.1.2.2	Calcolo di Alcune Quantità Fisiche . . . . .	18
2.2	Caso di Una Componente . . . . .	22
2.2.1	Grafici . . . . .	23
2.2.2	Discussione . . . . .	27
<b>3</b>	<b>Analisi della Stabilità</b>	<b>31</b>
3.1	Introduzione . . . . .	31
3.2	Analisi della Stabilità Termodinamica . . . . .	33
3.2.1	Analisi Termodinamica basata sulla variazione esplicita dei funzionali	34
3.2.2	Analisi Termodinamica basata sulle serie lineari di Poincaré . . . . .	34
3.3	Analisi della Stabilità Dinamica . . . . .	39
3.3.1	Introduzione . . . . .	39
3.3.2	Versione Euleriana . . . . .	39
3.3.2.1	Caso con Temperatura e Volume Costanti (Collasso Isotermo)	41
3.3.2.2	Caso con Energia e Volume Costante (Catastrofe Gravotermica)	49
3.3.2.3	Caso con Energia e Volume Costante con Termine Aggiuntivo nell'Energia . . . . .	62
3.3.3	Versione Lagrangiana . . . . .	66
3.3.4	Caso Temperatura e Pressione Costanti (Instabilità Isobara di Ebert e Bonnor) . . . . .	68
3.4	Analisi della Stabilità nel Caso a Due Componenti . . . . .	72
3.4.1	Introduzione . . . . .	72
3.4.2	Instabilità Termodinamica . . . . .	72
3.4.3	Instabilità Dinamica . . . . .	73

<b>4</b>	<b>Discussione e Conclusioni</b>	<b>81</b>
4.1	Termodinamica e Dinamica . . . . .	81
4.2	Possibile Ruolo del Momento Angolare Dettagliato . . . . .	84
4.3	Conclusioni . . . . .	86
<b>A</b>	<b>Conservazione Dettagliata del Momento Angolare</b>	<b>89</b>
<b>B</b>	<b>Una Rapida Nota sui Calori Specifici Negativi</b>	<b>91</b>
<b>C</b>	<b>Equilibri Idrostatici con Potenziali Generici</b>	<b>93</b>

# Introduzione

## 1.1 La Catastrofe Gravotermica e le Oscillazioni Gravotermiche

La termodinamica di un sistema autogravitante è un argomento affascinante, ricco di sorprese e ancora non completamente chiaro, ed è tuttora oggetto di ricerca (si vedano ad esempio gli articoli di rassegna [6], [33]).

L'inizio dello studio sistematico del comportamento molto particolare dei sistemi autogravitanti può essere fatto risalire<sup>1</sup> ai lavori di Bonnor [4] ed Ebert [12], i quali considerarono un gas perfetto autogravitante racchiuso in un involucro sferico e per primi ne costruirono le isoterme nel piano  $PV$ . Con grande sorpresa trovarono che, mentre a grandi volumi il gas si comporta come un normale gas perfetto non interagente, per il quale l'isoterma ha la forma di un'iperbole, a volumi piccoli l'isoterma assume la forma di un "ricciolo": si veda la figura 2.2(a). Questi autori fecero notare che la condizione  $\partial P / \partial V > 0$  in un'isoterma comporta un'instabilità del sistema. Facciamo notare che questi studi sono stati oggetto di un rinnovato interesse negli ultimi anni nel contesto dello studio della struttura di nubi nel mezzo interstellare, e per tali scopi sono state generalizzate a casi di simmetria non sferica [27].

Successivamente alle investigazioni di Bonnor ed Ebert, Antonov [1] nel 1962 scoprì che per un gas perfetto autogravitante, fissati l'energia totale ed il volume, non esiste un massimo globale dell'entropia di Boltzmann (formula (2.1)), e per volumi troppo grandi neppure un massimo locale: veniva meno così una condizione richiesta per l'esistenza di uno stato di equilibrio stabile. L'entropia di Boltzmann è una forma approssimata di entropia che si ritiene usualmente valida solo per un gas molto diluito e poco interagente (si veda ad esempio [15]), che certamente non è il caso di sistemi gravitanti; quindi rimane naturale chiedersi il perché di questa scelta. Il motivo principale è che non è possibile applicare in modo diretto la termodinamica statistica sviluppata da Gibbs: ad esempio la funzione di partizione canonica non è calcolabile perché diverge. Torneremo su questo punto nel capitolo finale della tesi: fino ad allora utilizzeremo come entropia quella di Boltzmann. Il problema della sfera isoterma fu in seguito studiato in dettaglio da Lynden-Bell e Wood nel 1968 [24] in un approccio che ricalcava ed estendeva quello di Antonov. I due autori analizzarono in particolare l'instabilità del sistema al variare delle condizioni imposte dall'esterno dandone un'interpretazione fisica in termini di calori specifici negativi. Come Antonov, conclusero che per una sfera di gas in un involucro sferico di massa ed energia totale (negativa) fissate:

---

<sup>1</sup>È curioso notare che Chandrasekhar in [9] sfiorò la problematica che fu in seguito affrontata da altri autori e di cui parleremo in questa Tesi, ma se ne disinteressò, perché il suo interesse principale in [9] non erano questioni riguardanti le instabilità. Si veda ad esempio [34].

- per raggi minori di un certo raggio critico  $R_{\text{critico}} = -0.335GM^2/E$  esiste almeno uno stato di equilibrio, ma per alcuni valori del raggio possono esistere più stati di equilibrio. Ciascuno di questi stati è instabile se e solo se il rapporto tra la densità centrale e la densità al bordo supera un valore critico pari a 709. Per ogni raggio minore di  $R_{\text{critico}}$  esiste sempre uno e un solo stato stabile.
- per raggi maggiori di  $R_{\text{critico}}$  non esistono stati di equilibrio.

Lynden-Bell e Wood conclusero che il sistema, evolvendo a seguito dell'instabilità, deve subire un collasso verso densità centrali arbitrariamente alte: a tale collasso diedero il nome di *catastrofe gravotermica*.<sup>2</sup> Il concetto chiave nell'interpretazione data da questi autori è quello di *calore specifico negativo*. Un sistema con calore specifico negativo, contrariamente alle situazioni usuali, se riceve energia, si raffredda, se cede energia, si scalda. La pittura fisica che tali autori diedero per la catastrofe è la seguente: immaginiamo una sfera gassosa autogravitante, confinata da un bordo fisico e con un alto rapporto fra la densità centrale e la densità al bordo. Il nucleo si può allora pensare approssimativamente autogravitante e per un sistema di particelle autogravitanti il teorema del viriale afferma che:

$$E = -\mathcal{T}$$

dove  $E$  è l'energia totale e  $\mathcal{T}$  è l'energia cinetica totale del sistema. Identificando l'energia cinetica del sistema con  $3NkT/2$  (cioè come energia termica) segue subito che il calore specifico vale:

$$C_V = \frac{dE}{dT} = -\frac{3}{2}Nk$$

che è negativo. Dunque il nucleo del sistema ha calore specifico negativo. La parte più esterna, che preme contro il bordo fisico, non essendo autogravitante è più simile a un comune gas e ha invece calore specifico positivo. Immaginiamo che all'inizio la temperatura sia uniforme. Poi, a seguito di fluttuazioni casuali, può succedere che il nucleo abbia una temperatura leggermente superiore della parte esterna: siccome si assume che il calore fluisca sempre dalla parte del sistema con temperatura<sup>3</sup> più alta a quella con temperatura più bassa, è il nucleo a cedere calore alla parte esterna. A causa del calore specifico negativo della parte interna, a fronte di una perdita di energia quest'ultima si scalda ulteriormente, si contrae e il flusso di calore aumenta, e così via fino al collasso del sistema: questa a grandi linee è l'idea fisica della catastrofe gravotermica. Nel corso della Tesi questa descrizione qualitativa verrà notevolmente approfondita. Tale pittura fisica suggerisce immediatamente che il tempo scala su cui avviene la catastrofe sia il tempo scala della conduzione termica. Nel 1980 lo stesso Lynden-Bell, insieme a Eggleton [25], usò un modello gassoso semplificato in cui, assumendo un flusso di calore proporzionale al gradiente della temperatura e che la condizione di equilibrio idrostatico fosse istantaneamente soddisfatta, trovò che la catastrofe procedeva secondo la pittura descritta sopra, portando a una densità centrale infinita in un tempo finito.

Parliamo ora di un altro fenomeno, scoperto nel 1983 da Sugimoto e Bettwieser [38]: le *oscillazioni gravotermiche*. Questi autori suggerirono che il modello di Lynden-Bell e Eggleton [25] mancasse di un ingrediente fondamentale, che ne condiziona fortemente l'evoluzione: la generazione di energia dovuta alla formazione di *sistemi binari* tramite interazioni a tre corpi, che avviene tanto più efficientemente quanto più le densità sono alte (e quindi nel nucleo che sta subendo il collasso). L'energia gravitazionale di legame di formazione della binaria viene liberata come energia disponibile per il sistema. Attualmente si pensa che oltre alle interazioni a tre corpi che possono formare binarie, altri processi legati alle binarie possono contribuire

<sup>2</sup>Una osservazione sulla nomenclatura: il termine *catastrofe gravotermica* è utilizzato da Lynden-Bell e Wood solo per identificare il collasso di un sistema quando si considerino come vincoli energia totale e volume costanti, mentre a volte in letteratura lo stesso termine è utilizzato per indicare collassi con altre condizioni al contorno. In questa tesi seguiremo la nomenclatura di Lynden-Bell e Wood. Se come vincoli si considerano temperatura e volume costanti, l'instabilità a volte viene indicata con il nome di collasso isoterma.

<sup>3</sup>Osserviamo qui che la parola temperatura è sempre sinonimo di dispersione di velocità; non è completamente chiaro quale sia il suo significato termodinamico.

al rilascio di energia (soprattutto processi legati alle binarie primordiali, quelle che erano già presenti all’inizio; si veda ad esempio [13] capitolo 27). Sugimoto e Bettwieser trovarono che il rilascio di energia può fermare e invertire il processo di collasso, provocando un’espansione del sistema; dopodiché la densità centrale del sistema subirà delle oscillazioni altamente non lineari che chiamarono oscillazioni gravotermiche. Oscillazioni non lineari dall’aspetto molto simile che sono state identificate con le oscillazioni gravotermiche di Sugimoto e Bettwieser sono state osservate anche in differenti tipi di modelli, ad esempio le simulazioni a N-corpi (si vedano ad esempio [28], [29]) e modelli basati su equazioni di Fokker-Planck. Nel capitolo finale della Tesi suggeriremo una possibile spiegazione alternativa alle oscillazioni trovate nelle simulazioni a N corpi.

## 1.2 Cenni sugli Ammassi Globulari. Paragone coi Sistemi Gassosi

Nella Sezione 1.1 abbiamo descritto brevemente a livello teorico alcune previsioni su un sistema ideale di N masse puntiformi soggette a mutua interazione gravitazionale. Tali argomenti sono di primaria importanza in astrofisica, nel contesto della dinamica degli *ammassi globulari*. Gli ammassi globulari sono una classe di sistemi astrofisici costituiti da un grande numero di stelle, tipicamente dell’ordine del milione, che interagiscono tra loro prevalentemente attraverso la forza gravitazionale (si veda ad esempio la figura 1.1). Si tratta di sistemi autogravitanti legati, di forma approssimativamente sferica. Gli ammassi globulari sono tra le prime strutture formatesi nella nostra Galassia; galassie esterne, come M31 e M87, sono dotate di sistemi di ammassi globulari di cui abbiamo cominciato a studiare le proprietà. Fino a poco tempo fa si riteneva che la maggior parte delle stelle negli ammassi globulari fossero di fatto nate contemporaneamente e in ambiente omogeneo, così che le loro popolazioni stellari, particolarmente semplici, sono state utilizzate come un laboratorio semplice per lo studio dell’evoluzione stellare. In realtà studi recenti hanno mostrato che il quadro generale, a questo riguardo, è ben più complesso. Dal punto di vista della dinamica, gli ammassi globulari si distinguono dai sistemi stellari più grandi, come le galassie, per aver un’età spesso più grande del tempo-scala caratteristico degli incontri stella-stella; pertanto si ritiene che questi sistemi non siano molto lontani da condizioni di rilassamento termodinamico (anche se su tempi scala dell’ordine di un centinaio di milioni di anni possono essere studiati come sistemi stellari non-collisionali). In prima approssimazione, nel contesto dinamico, gli ammassi globulari si possono quindi considerare come un sistema idealizzato di N masse puntiformi che interagiscono tra loro unicamente tramite l’interazione gravitazionale. Nella Tesi ci occuperemo principalmente dell’aspetto dinamico di tali sistemi.

L’analogia tra i sistemi gassosi di Lynden-Bell e gli ammassi globulari non è completa; infatti tra poco elencheremo alcune differenze tra i due, rilevanti per quanto riguarda la dinamica. È naturale porsi le seguenti domande:

1. La catastrofe gravotermica avviene negli ammassi globulari?
2. Se la catastrofe avviene, come evolvono tali sistemi una volta innescato il processo di collasso?

Prima di occuparci direttamente di queste domande, parliamo brevemente degli ammassi globulari confrontandoli con un gas di laboratorio. Discutiamo i tempi scala nell’uno e nell’altro sistema (si veda [14]). Definiamo, per entrambi i sistemi,  $t_{\text{LTE}}$  il tempo necessario perché si raggiunga una distribuzione *localmente* Maxwelliana di velocità<sup>4</sup>,  $t_{\text{GTE}}$  il tempo di rilassamento globale, cioè il tempo in cui il trasporto di energia riesce a equilibrare la temperatura di diverse parti del sistema lontane tra loro, e infine  $t_d$  il tempo dinamico.

In un gas di laboratorio  $t_{\text{LTE}}$  va identificato con il tempo caratteristico tra due urti successivi nel moto casuale delle particelle,  $t_{\text{GTE}}$  con il tempo che la conduzione termica impiega

<sup>4</sup>LTE sta per “local thermodynamic equilibrium”

a trasportare calore tra parti lontane del sistema e  $t_d$  con il tempo che il suono impiega ad attraversare il sistema. In un gas comune di laboratorio (non autogravitante) tipicamente vale che[14]

$$t_{\text{LTE}} \ll t_d \ll t_{\text{GTE}} \quad (\text{Gas di Laboratorio}) \quad (1.1)$$

In un ammasso globulare il libero cammino medio di una stella è più grande della lunghezza del sistema (al contrario di quanto avviene in un gas), per cui sono necessarie diversi periodi orbitali prima che una stella possa risentire degli effetti delle collisioni. Il tempo scala tipico in cui una stella sente gli effetti delle collisioni con le altre è il tempo di rilassamento a due corpi, che rappresenta il tempo medio in cui una stella subisce una deflessione cumulativa di un angolo  $\pi/2$  a causa di interazioni con le altre e la cui espressione è data da (si vedano ad esempio [2], [10]):

$$t_{2\text{-corpi}} = \frac{v_{\text{rel}}^3}{8\pi n G^2 m^2 \log \Lambda},$$

dove  $v_{\text{rel}}$  è la velocità relativa media tra le stelle,  $n$  è il numero medio locale di stelle per unità di volume,  $m$  sono le masse delle stelle (assunte per semplicità tutte uguali) e  $\log \Lambda$  è il logaritmo di Coulomb, che si può stimare come  $\log \Lambda \simeq \log(0.4N)$  dove  $N$  è il numero di totale di stelle. Come è lecito aspettarsi,  $t_{2\text{-corpi}}$  è più corto dove la densità è più alta (tipicamente verso il centro dell'ammasso).

A causa del fatto che il libero cammino medio in un ammasso è lungo e a causa del fatto che il tempo di rilassamento a due corpi si ottiene sommando tante piccole deflessioni dovute a particelle lontane grazie al lungo raggio di azione dell'interazione gravitazionale, l'equilibrio termico globale e locale viene raggiunto di pari passo grazie alle interazioni a due corpi. Immaginiamo ad esempio di avere tutte le stelle distribuite secondo una Maxwelliana ad una temperatura comune, tranne un gruppo di stelle che, al tempo zero, hanno velocità distribuite secondo una Maxwelliana a una temperatura superiore, localizzate in una piccola regione spaziale. Le stelle più veloci, su tempi sufficientemente lunghi, tenderanno ad andare in equipartizione con le altre stelle, cedendo energia cinetica. A causa del fatto che il libero cammino medio è molto grande, le stelle più veloci ridistribuiranno la loro energia non alle stelle più vicine, ma a stelle che si trovano in punti lontani rispetto al punto di partenza, contrariamente a quanto succede in un gas, in cui le particelle più veloci cedono il loro calore a quelle vicine e così via, secondo il meccanismo usualmente noto come conduzione termica: quest'ultimo non va dunque inteso nel senso usuale per un ammasso globulare. Possiamo dunque identificare il tempo di rilassamento a due corpi sia con  $t_{\text{LTE}}$  che con  $t_{\text{GTE}}$ :

$$t_{2\text{-corpi}} \simeq t_{\text{LTE}} \simeq t_{\text{GTE}}.$$

Il tempo dinamico per un ammasso globulare è il tempo di free-fall, che è il tempo caratteristico di un'orbita stellare attorno al centro dell'ammasso. Il rapporto tra il tempo dinamico e il tempo di rilassamento a due corpi vale circa (vedi [2]):

$$\frac{t_d}{t_{2\text{-corpi}}} \simeq \frac{\log N}{N}$$

che implica che per un ammasso globulare  $t_d \ll t_{2\text{-corpi}}$ . Per un ammasso globulare in definitiva abbiamo quindi

$$t_d \ll t_{\text{LTE}} \approx t_{\text{GTE}} \quad (\text{Ammasso Globulare}) \quad (1.2)$$

Questo significa che l'equilibrio termico viene raggiunto in due modi diversi in un gas e in un ammasso globulare: nel primo si raggiunge rapidamente un equilibrio termodinamico locale, e poi tramite la conduzione di calore si propaga per raggiungere successivamente un equilibrio termodinamico globale; nel secondo le due cose avvengono più o meno simultaneamente.

Passiamo ad elencare alcune delle differenze ravvisabili tra il gas di Lynden-Bell e Wood e la situazione reale di un ammasso globulare:

- Un ammasso globulare non ha un bordo fisico<sup>5</sup>, mentre in [24] c'è un guscio dalle pareti riflettenti. Senza guscio, la sfera isoterma ha massa infinita e dunque il troncamento è necessario.
- Per un ammasso globulare vale (1.2), mentre l'interpretazione fisica della catastrofe con i flussi di calore di Lynden-Bell e Wood presuppone (1.1).
- Le stelle hanno dimensione finita, ed inoltre evolvono al passare del tempo (ad esempio possono esplodere come supernovae).
- In un ammasso reale esistono numerose stelle binarie, che alterano considerevolmente la dinamica del sistema.
- In un ammasso globulare le stelle non hanno tutte la stessa massa, ma hanno una certa distribuzione (funzione di massa), questo anche nel caso in cui il contributo di binarie (che si possono vedere come un unico oggetto più massiccio) non risulti significativo.

Descriviamo ora brevemente il quadro di riferimento generale in cui viene studiata la dinamica degli ammassi globulari (si veda ad esempio [37]). Il campo della dinamica si può dividere in due sottocampi, chiamati rispettivamente di dinamica “collisionale” e “non collisionale”. Il termine “non collisionale” non significa che vengono trascurate le interazioni tra le particelle, ma che si considera solo il cosiddetto campo gravitazionale medio, che è ottenuto trascurando la granularità del sistema. L'equazione di base della dinamica non collisionale è la cosiddetta “Equazione di Boltzmann non collisionale” (si veda ad esempio [37]). Quando due stelle si avvicinano abbastanza, il campo gravitazionale che sentono differisce sensibilmente dal campo medio. Nella dinamica collisionale si tiene conto della granularità del sistema e quindi degli effetti delle interazioni a due o più corpi, le quali sono responsabili per la conduzione di “calore” attraverso il sistema; esse aiutano il sistema a raggiungere l'equipartizione dell'energia. Come abbiamo già notato, in un ammasso globulare bisogna essere cauti su come intendere il concetto di diffusione di calore, a causa del lungo cammino libero medio. Sui tempi lunghi che caratterizzano l'età di questi sistemi stellari l'evoluzione risulta dominata da questa lenta diffusione di calore. In particolare le collisioni sono responsabili dei seguenti effetti:

- *Evaporazione*: può succedere che a seguito di incontri con altre stelle, una stella acquisisca una velocità superiore alla velocità di fuga dall'ammasso, e quindi che venga persa dall'ammasso. Questo avviene con maggiore probabilità se la stella è di piccola massa.
- *Segregazione di massa*: è la tendenza per le stelle di massa maggiore a stare più vicine al centro. In presenza di equilibrio termico la densità di stelle di una componente con una certa massa è proporzionale al fattore  $e^{-\frac{m\Phi}{kT}}$ , dove  $m$  è la massa della componente considerata,  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale,  $k$  la costante di Boltzmann e  $T$  la temperatura: così dove il campo gravitazionale è più basso, ossia verso il centro dell'ammasso, ci sono più stelle di massa grande, e dove è più debole accade il viceversa. Negli ammassi globulari le varie componenti non sono in equilibrio termico, ma le collisioni tendono a portarle, e dunque tendono anche ad aumentare la segregazione di massa.

Torniamo ora alle due domande che ci eravamo posti. Dal lato teorico, come spiegato nella Sezione 1.1, i modelli gassosi confermano l'accadere della catastrofe, e tale risultato è confermato da modelli basati su equazioni di Fokker-Planck e da simulazioni a N-corpi (per una rassegna dei modelli si veda ad esempio [13]). I modelli gassosi lavorano nell'ipotesi (1.1): in particolare il fatto che  $t_d \ll t_{GTE}$  permette di affermare che l'equazione di equilibrio idrostatico è sempre soddisfatta durante l'evoluzione del sistema (il riequilibrio dinamico avviene istantaneamente rispetto a quello termico globale), cioè si assume sempre valida la seguente:  $\nabla P = -\rho \nabla \Phi$ , dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale. In questi modelli si assume usualmente l'equazione di stato dei gas perfetti,  $P = \rho kT/m$ , e una conduzione di calore

<sup>5</sup>esiste un taglio mareale, che però al contrario di un bordo fisico permette l'evaporazione di stelle. Si veda ad esempio [37].

proporzionale al gradiente di temperatura; come tempo scala della conduzione viene tipicamente preso quello di rilassamento dovuto agli incontri a due corpi. Durante il collasso in questi modelli la temperatura non è dunque uniforme. Come avevamo anticipato verso la fine della Sezione 1.1, in questo tipo di modelli la catastrofe avviene quindi sui tempi scala della conduzione termica (si veda anche [39] e [31]). Il modello del 1980 di Lynden-Bell e Eggleton suggeriva che la catastrofe avrebbe portato a una densità centrale infinita in un tempo finito, corrispondente a circa 15 volte il tempo di rilassamento termico. Siccome molti ammassi globulari sono abbastanza vecchi, si sarebbe dovuta vedere traccia osservativa di ammassi totalmente collassati [38], la quale mancava. La previsione di Sugimoto e Bettwieser delle oscillazioni gravotermiche risolve il problema, perché il collasso è fermato dalla generazione di binarie. Inoltre secondo le indagini di questi autori il sistema passa la maggior parte del suo tempo nello stato espanso, cosicché un'istantanea di molti sistemi ne prenderebbe la maggior parte in uno stato non collassato.

Riassumendo, la pittura che si è venuta fin qui delineando per quanto riguarda la catastrofe in un ammasso globulare, la cui interpretazione si basa in buona parte sull'uso dell'entropia di Boltzmann e di modelli gassosi, è questa: il sistema, se sufficientemente concentrato, inizia a collassare su tempi scala termici, che sono i tempi scala di rilassamento dovuto alle collisioni a due corpi. Il collasso viene fermato dal rilascio di energia dovuto alle binarie, che invertono il processo provocando un'espansione. Seguono così continue contrazioni ed espansioni (altamente non lineari) del nucleo dell'ammasso, chiamate oscillazioni gravotermiche.

Nella figura 1.2 è riportato un confronto tra i profili di brillantezza superficiale in ammassi globulari ritenuti collassati e ammassi globulari ritenuti non collassati.

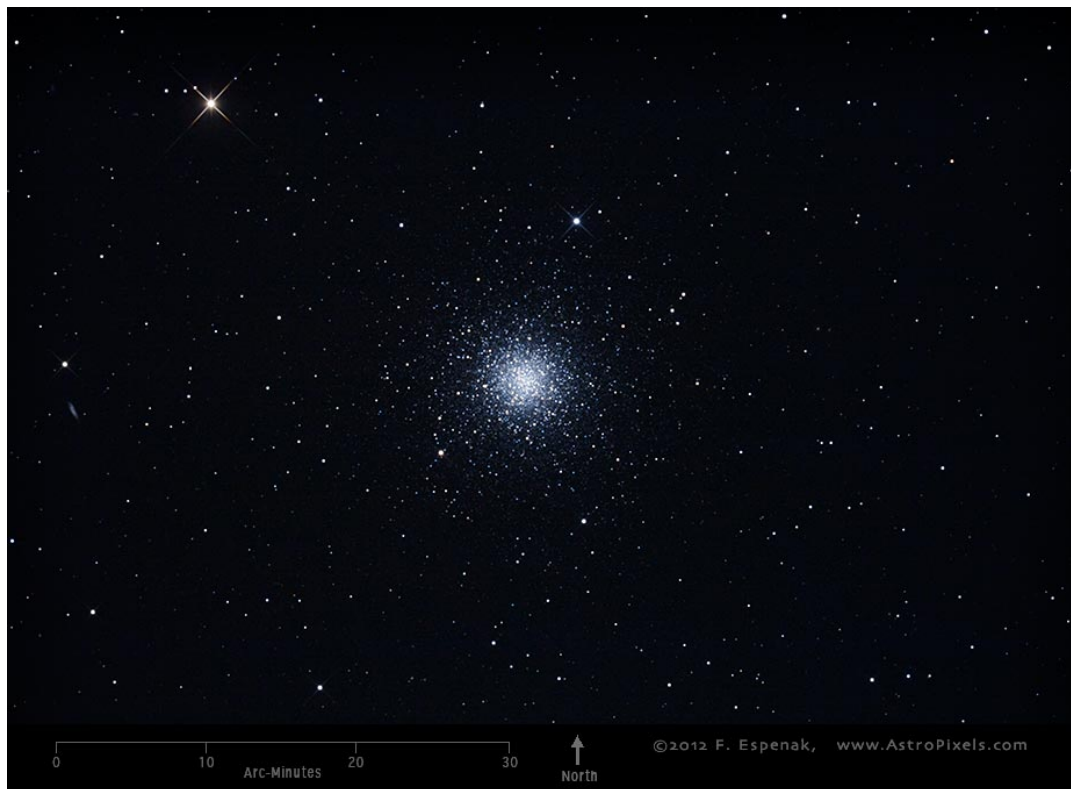


Figura 1.1: Un'immagine dell'ammasso globulare M3 (o NGC 5272), ritenuto non collassato. Fonte dell'immagine: <http://astropixels.com/globularclusters/M3-A01.html>



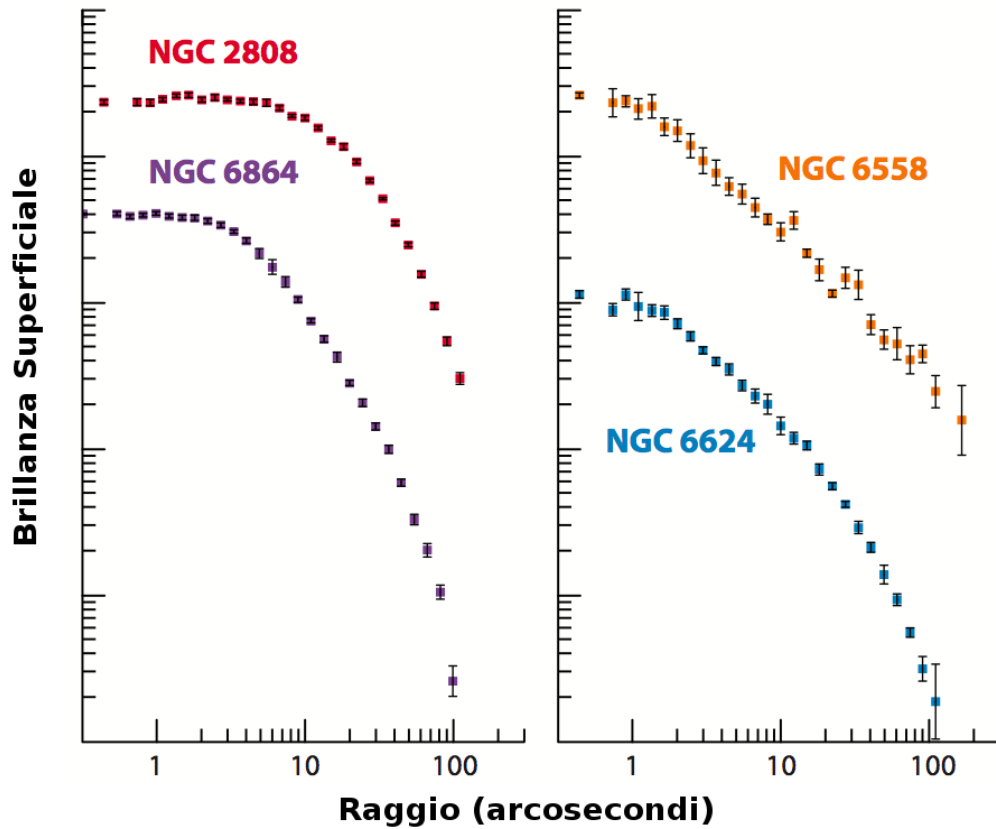


Figura 1.2: Confronto tra profili di brillanza superficiale (flusso di energia misurato per unità di angolo solido) per ammassi globulari che sono indicati nei cataloghi come collassati (a sinistra) e ammassi che sono indicati come collassati (destra). Gli ammassi collassati sono ritenuti tali sostanzialmente perché risultano troppo concentrati per rientrare nel quadro descrittivo dei modelli di King [21]. Il tratto caratteristico degli ammassi ritenuti collassati è un rapido decrescere della brillanza superficiale a partire dal centro, contrariamente agli ammassi non collassati per cui la decrescita è più graduale e hanno nuclei più grandi e piatti. Fonte dell'immagine: [11].

### 1.3 Un Approccio Dinamico alla Catastrofe Gravotermica

Abbiamo visto nelle sezioni precedenti che l'approccio tradizionale alla catastrofe gravotermica, basato sulla termodinamica, purtroppo presenta alcune difficoltà concettuali di fondo. Per di più alcuni degli argomenti termodinamici in questione, come il metodo delle serie lineari di Poincaré, non indicano il tempo scala su cui si attua la catastrofe. Il tempo caratteristico su cui si attua la catastrofe negli ammassi globulari in alcuni modelli gassosi, come quello di Lynden-Bell e Eggleton, viene posto "a mano" uguale al tempo di diffusione del calore in un ammasso globulare, che a sua volta viene supposto uguale a  $t_{2-cori}$ : come abbiamo già fatto notare il concetto di diffusione di calore è però da trattare con cautela in un ammasso globulare. Vista l'importanza del fenomeno e del quadro interpretativo collegato, è auspicabile un metodo alternativo a quello termodinamico per analizzare la catastrofe gravotermica, che poggi su basi fisiche più semplici e meglio consolidate.

Scopo principale di questa Tesi è appunto una rielaborazione della catastrofe gravotermica che prescindano, per quanto è possibile, dalla trattazione termodinamica. Vedremo infatti che è possibile riottenere i principali risultati dell'analisi di Lynden-Bell & Wood con un approccio che si basa sull'idrodinamica di un fluido isoterma comprimibile e autogravitante (in letteratura, di questo approccio in relazione alla catastrofe gravotermica abbiamo trovato traccia solo in Chavanis [7], [8]. Gli unici altri studi sulla stabilità di un fluido autogravitante trovati sono [35] e [42].). L'unico (debole) collegamento con la termodinamica, in questo schema, è la temperatura, che viene considerata semplicemente come un parametro che caratterizza l'equazione di stato. Nella Tesi viene dimostrato che l'approccio idrodinamico conferma i risultati dell'approccio termodinamico ma al contempo, evitando l'uso di ipotesi non completamente chiare, mette in luce le caratteristiche principali che stanno alla base della catastrofe gravotermica. Un ulteriore vantaggio dell'approccio idrodinamico è che esso permette di studiare non solo il punto in cui si innesca l'instabilità (la cosiddetta condizione di stabilità marginale), ma anche le situazioni non marginali e l'evoluzione successiva del sistema. L'approccio idrodinamico è inoltre generalizzabile, al pari di quello termodinamico, ai casi in cui il potenziale di interazione è diverso da quello gravitazionale. Studiando la stabilità di un fluido autogravitante, lavoreremo nell'ipotesi che la temperatura si mantenga sempre uniforme e che valga l'equazione di stato del gas ideale: questo equivale a considerare conducibilità termica infinita e a considerare sempre soddisfatta la condizione di equilibrio termico locale. Le argomentazioni vengono quindi sviluppate sotto le seguenti ipotesi:

$$t_{LTE} \ll t_d \quad (1.3)$$

$$t_{GTE} \ll t_d \quad (1.4)$$

da confrontare con le condizioni che si hanno nella situazione reale (1.2) e nel modello gassoso dell'approccio cinetico (1.1). Come abbiamo fatto notare, normalmente si assume, basandosi sui modelli gassosi in cui vale la (1.1), che la catastrofe negli ammassi globulari avvenga su tempi scala termici. Negli ammassi globulari vale però la (1.2). In un caso in cui valgono le condizioni (1.3) e (1.4) si trova che l'instabilità avviene su tempi scala dinamici. Le instabilità non sono dunque solo termodinamiche ma anche dinamiche<sup>6</sup>. È allora lecito chiedersi: se l'instabilità è anche dinamica, perché non avviene su tempi scala dinamici negli ammassi globulari? perché l'instabilità non si manifesta a livello non collisionale? Evidentemente collegata a questa questione, sorge naturale un'altra domanda (in aggiunta alle due poste all'inizio della Sezione 1.2):

3. Le collisioni sono un ingrediente indispensabile per l'innescarsi dell'instabilità?

<sup>6</sup>Ci si può chiedere se le instabilità anziché essere sia dinamiche che termodinamiche, non siano dinamiche *invece che* termodinamiche. Notiamo infatti che l'analisi termodinamica è svolta nell'approssimazione di campo medio e rivela solamente l'esistenza di stati metastabili, e un equilibrio termodinamico completo non si sa se e in quale senso possa esistere, e in tal caso in cosa consista. Possiamo dunque chiederci che senso abbia parlare di instabilità termodinamica, e se non si tratti invece di un'instabilità dinamica "mascherata".

In letteratura c'è consenso generale nel ritenere le collisioni un ingrediente fondamentale per l'innescarsi dell'instabilità, sebbene non abbiamo trovato in letteratura una dimostrazione rigorosa di questo fatto. Il ruolo delle collisioni nell'innescarsi dell'instabilità è il motivo di fondo per cui essa non può manifestarsi a livello dinamico in ambiente non collisionale. Se le collisioni non fossero indispensabili per l'instabilità, allora il collasso potrebbe attuarsi su tempi scala dinamici. Torneremo su queste questioni nel capitolo finale della Tesi.

## 1.4 Ruolo della Presenza di Uno Spettro di Masse

Nella discussione fatta finora è sempre stato sottinteso che le stelle avessero massa identica. Possiamo chiederci com'è influenzato lo schema fin qui delineato dalla presenza di uno spettro di masse. Per questo scopo è utile considerare un modello semplificato di più facile trattazione in cui due sole componenti sono presenti:  $m_A$  ed  $m_B$ . Negli ammassi globulari si è spesso interessati al regime in cui  $m_B \gg m_A$  e la maggior parte della massa è costituita dalle particelle di massa  $m_A$ : si può pensare ad esempio ad un ammasso globulare in cui il ruolo delle stelle massicce è giocato dalle stelle di neutroni (con massa circa  $1.4M_\odot$ ) e quello della componente leggera da stelle di sequenza principale (si veda ad esempio [20]). Sotto queste condizioni si ritiene che il tempo scala necessario a raggiungere l'equipartizione sia molto più breve del tempo di rilassamento dovuto a incontri a due corpi (vedi [13], capitolo 18). In un sistema a due componenti quindi le masse più pesanti segregano rapidamente verso il centro. Ci sono evidenze numeriche che questo porti a un'accelerazione considerevole dei tempi di collasso (si veda sempre [13], capitolo 18). Sotto le stesse condizioni, cioè  $m_B \gg m_A$  e massa totale della prima componente molto maggiore della massa totale della seconda, Spitzer [36] ha derivato la cosiddetta *mass segregation instability*.<sup>7</sup> Si tratta di un argomento che, assumendo il teorema del viriale e varie altre ipotesi semplificatrici (che appaiono ragionevoli se si parte da una situazione in cui le stelle pesanti sono molto concentrate al centro), suggerisce che equipartizione globale dell'energia può essere realizzata solo se vale la seguente condizione:

$$M_B/M_A < 0.16 [m_A/m_B]^{3/2}. \quad (1.5)$$

L'immagine fisica che ha ispirato e fa da sfondo al criterio di Spitzer è sostanzialmente la seguente: immaginiamo di partire da una situazione fisica in cui le stelle pesanti sono molto concentrate al centro, mentre le stelle di massa leggera sono diffuse: le prime costituiscono sostanzialmente un sistema autogravitante autonomo. Se le stelle pesanti hanno temperatura superiore a quelle leggere, tenderanno a cedere loro energia, ma essendo autogravitanti hanno calore specifico negativo e, cedendo energia, aumentano la loro temperatura. In questo modo il sistema di stelle pesanti collassa indipendentemente e l'equipartizione dell'energia non viene mai raggiunta. Si ritiene di conseguenza che quando la condizione (1.5) non è verificata, negli ammassi globulari si possa produrre un nucleo centrale di stelle pesanti, che si contraggono indipendentemente dal resto del nucleo, accelerando il collasso dovuto all'instabilità gravotermica (si veda ad esempio [37] e [3] pag. 614). L'argomento di Spitzer è lontano dal risultare rigoroso, e non è evidente che le numerose ipotesi alla base dell'argomento siano immediatamente applicabili. Merritt ha costruito esplicitamente degli esempi di sistemi che, violando una delle numerose assunzioni di Spitzer, permettono equipartizione dell'energia per qualunque valore di  $M_B/M_A$ . Nonostante questo, l'immagine fisica descritta sopra che fa da sfondo al criterio appare corretta ed è verificata in maniera qualitativa da vari autori, sia con studi teorici che con simulazioni (si vedano ad esempio [44], [43]). Nel contesto della sfera isoterma a due componenti, Lightman [23] e Yoshizawa [43] hanno messo in evidenza che per in certi intervalli dei parametri  $\beta \equiv m_B/m_A$  e  $M_B/M_A$  è possibile che lo stato stabile di energia minima abbia energia positiva, indicando che non esistono stati legati (cioè con energia negativa) stabili; tali autori hanno quindi messo in relazione questa scoperta con il criterio (1.5).

<sup>7</sup>Anche se, come ha fatto notare Merritt [30], chiamarla instabilità è improprio, in quanto si tratta di assenza di uno stato di equilibrio.

Tali studi e la domanda di quale sia il ruolo della segregazione di massa nella catastrofe gravotermica ci hanno spinto (capitolo 2) a studiare gli stati di equilibrio partendo dal caso a due componenti (che naturalmente comprende anche il caso ad una componente come caso particolare) e ad accennare un'analisi della stabilità per il caso a due componenti (Sezione 3.4).

## 1.5 Struttura della Tesi

La Tesi è strutturata come segue.

Nel secondo capitolo si definiscono e si studiano gli stati di equilibrio della sfera isoterma a due componenti. Le stesse configurazioni di equilibrio sono definibili in due modi indipendenti: 1) imponendo equilibrio idrostatico e assumendo l'equazione di stato di un gas perfetto isoterma 2) massimizzando l'entropia di Boltzmann. Il primo modo è più appropriato quando si consideri la trattazione idrodinamica e si voglia prescindere il più possibile dalla termodinamica. Lo studio degli equilibri prosegue presentando le formule di riferimento per le principali quantità fisiche e discutendo in dettaglio la forma di alcuni grafici (isoterme, adiabatiche, potenziali termodinamici, eccetera) per il caso ad una componente.

Nel terzo capitolo, che rappresenta il principale contributo originale della tesi, si analizza la stabilità delle configurazioni di equilibrio definite nel capitolo 2. Viene ricostruita, tramite rielaborazione personale, l'analisi degli studi classici basata sulla termodinamica. In seguito si analizza la stabilità con l'approccio idrodinamico e si trova una perfetta corrispondenza con l'approccio termodinamico, al variare dei vincoli che costituiscono le condizioni al contorno del sistema (pressione oppure volume costante, energia oppure temperatura). Questo conduce direttamente ad analizzare delle equazioni differenziali agli autovalori, che nel caso più semplice possono essere ricondotte ad un'equazione di Schrödinger il cui potenziale efficace è mostrato nella figura 3.3. Tali equazioni possono sorprendentemente essere analizzate in buona parte con approcci analitici; qualora ciò non fosse possibile, si è fatto ricorso a metodi numerici. I risultati principali sono riassunti nelle figure 3.2, 3.7 e 3.18, che rappresentano il valore minimo della frequenza al quadrato (negativo quando il modo è instabile) al variare del parametro adimensionale  $\Xi$  che caratterizza le dimensioni del sistema e il suo grado di concentrazione. Vengono inoltre mostrati i profili di densità e velocità per vari valori dell'energia. Tra i vari spunti proposti nel capitolo, è di particolare interesse quello di simulare tramite un termine aggiuntivo nell'energia un fattore fisico che abbia come conseguenza quella di inibire il collasso quando il sistema, contraendosi, si scalda oltre un certo limite. Questo viene messo in relazione con la nozione comunemente accettata che il collasso gravotermico può essere fermato dalla generazione di energia dovuta alla formazione di stelle binarie nelle parti più dense centrali degli ammassi globulari, come spiegato nella prima parte di questo capitolo. Il paragrafo finale del capitolo è dedicato allo studio della stabilità per il caso a due componenti (uno studio recente di questo tema, basato essenzialmente su simulazioni numeriche, è quello presentato in [5]); anche qui si mostra l'equivalenza tra i due approcci (termodinamico e idrodinamico) in relazione all'identificazione dei punti di stabilità marginale.

Il quarto e ultimo capitolo riprende la discussione del presente capitolo e, alla luce dei risultati ottenuti, fornisce alcuni spunti per interpretare il diverso comportamento di sistemi collisionali da quello di sistemi strettamente non-collisionali: in particolare, viene evidenziato il possibile ruolo svolto dalla conservazione dettagliata del momento angolare nell'inibire la catastrofe gravotermica in sistemi strettamente non-collisionali. Vengono infine messi in rilievo alcuni aspetti interessanti non ancora completamente chiari, che potrebbero essere oggetto di sviluppi successivi alla Tesi.

## Sfera Isoterma a Due Componenti

### 2.1 Analisi Matematica e Formule di Riferimento

#### 2.1.1 Introduzione

In questo capitolo definiamo ed analizziamo la struttura degli stati di equilibrio della sfera isoterma autogravitante a due componenti, di cui analizzeremo la stabilità nei capitoli successivi. Riferimenti per questa parte sono, per il caso a una componente gli studi classici citati nell'introduzione ([24], [4], [9], [1]), e per il caso a due componenti [40], [23] e [43].

Come abbiamo notato nel primo capitolo, gli stati di equilibrio sono definibili in due modi diversi: 1) massimizzando l'entropia di Boltzmann 2) come stati di equilibrio idrostatico. Specificheremo meglio queste definizioni tra poco. Ricaveremo gli stati partendo dal primo approccio e mostreremo poi (si veda Eq. (2.21)) che esso è equivalente al secondo.

Si considerino due gas ideali classici confinati all'interno di un involucro sferico di raggio  $R$ , dalle pareti perfettamente riflettenti. Siano rispettivamente  $A$  e  $B$  i due gas,  $M_A$  ed  $M_B$  le loro masse totali,  $m_A$  ed  $m_B$  le masse delle singole particelle che li compongono.

Come si può specificare lo stato di un tale sistema? Le descrizioni che prenderemo in considerazione sono due: la descrizione cinetica e la descrizione fluida. Ecco in cosa consistono:

1. Nella descrizione cinetica i due gas sono pensati come insiemi di particelle descritti dalle funzioni di distribuzione negli spazi delle fasi di particella singola; tali funzioni di distribuzione sono definite nel seguente modo:

$$f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v \equiv \# \text{ di particelle di tipo A nel } d^3r d^3v$$

$$f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3r d^3v \equiv \# \text{ di particelle di tipo B nel } d^3r d^3v$$

Dove  $\mathbf{r}$  rappresenta il vettore posizione e  $\mathbf{v}$  la velocità;

2. Nella descrizione fluida i due gas sono pensati come fluidi ideali, con equazione di stato di un gas perfetto, che interagiscono tra loro solo tramite la gravità (ciascun gas non sente la pressione dell'altro, ma solo di se stesso).

I due approcci si riveleranno essere perfettamente equivalenti per la descrizione degli stati di equilibrio, purché gli stati di equilibrio siano definiti nel seguente modo: nella descrizione cinetica lo stato di equilibrio è lo stato che *estremizza* l'entropia di Boltzmann,

$$S_b \equiv -k \left[ \int f_A \log f_A d^3r d^3v + \int f_B \log f_B d^3r d^3v \right] \quad (2.1)$$

fissati l'energia totale, il volume dell'involucro sferico e il numero totale di particelle di ciascuna componente. Lo stato di equilibrio viene detto termodinamicamente stabile se la funzione

di distribuzione che lo caratterizza oltre a essere un estremo del funzionale entropia è anche un massimo locale<sup>1</sup>, altrimenti l'equilibrio è detto termodinamicamente instabile. Nella descrizione fluida lo stato di equilibrio è definito come quello che realizza l'equilibrio idrostatico a temperatura uniforme.

Ci possiamo interrogare sulla validità della scelta di utilizzare l'espressione per l'entropia di Boltzmann anziché altre espressioni, ad esempio quella di Gibbs, che in generale non sono equivalenti. poiché questo capitolo è pensato solo come un capitolo in cui si ricavano formule di riferimento, rimandiamo al capitolo 4 per una discussione di questo punto. Procediamo dunque con il calcolo degli stati di equilibrio.

### 2.1.2 Equazioni Generali

Per studiare le configurazioni di equilibrio del sistema dei due gas, ci chiediamo innanzitutto quanti siano i parametri che servono per definire lo stato del sistema. Supponiamo dapprima di avere una sola componente e di realizzare fisicamente la cosa. Prendiamo una sfera, mettiamoci dentro il gas e poi colleghiamola ad un bagno termico. Le quantità che definiscono queste operazioni sono il raggio  $R$  della sfera, la massa  $m$  di singola particella, la quantità di gas  $M$  e la temperatura  $T$  del bagno termico. Si tratta quindi in totale di 4 quantità,  $\{R, T, M, m\}$ , che tramite la costante di Boltzmann  $k$  e la costante di gravitazione  $G$  possono essere ridotte a due scale dimensionali,  $kT$  e  $R$ , e due parametri adimensionali,  $GM^2/(RkT)$  e  $M/m$ . Notiamo però che se si tengono fissi  $R$ ,  $T$  ed  $M$ , il numero totale di particelle  $M/m$  non risulta rilevante in un'approssimazione di campo medio in cui si trascura la granularità del sistema, per esempio i profili di densità non possono dipendere da esso. Dunque la maggior parte delle quantità fisiche, a meno che non coinvolgano esplicitamente il numero totale di particelle, saranno funzione di soli due scale e un parametro adimensionale.

I parametri indipendenti saranno ovviamente sempre nello stesso numero, ma sono possibili diverse scelte. Vedremo che ci risulterà spesso comodo usare come scala la densità centrale  $\rho_c$  e come parametro adimensionale la quantità  $kT/(4\pi Gm\rho_c R^2)$ .

Nel caso si considerino due componenti si aggiungono ai precedenti due ulteriori parametri: il rapporto tra le masse totali  $M_B/M_A$  ed il rapporto fra le masse di singole particelle  $\beta \equiv m_B/m_A$ .

Cominciamo ora lo studio delle equazioni utilizzando i due approcci descritti nell'introduzione. Ricaviamo dapprima gli stati di equilibrio utilizzando l'approccio cinetico, che è quello utilizzato da Lynden-Bell e Wood in [24], cui si rimanda per ulteriori dettagli. Mostriamo poi l'equivalenza dei due approcci per quanto riguarda gli stati di equilibrio. Si parte dall'affermazione che un sistema con energia e volume fissati è all'equilibrio termodinamico stabile quando si trova nella configurazione di massima entropia (qui è decisiva la scelta della particolare espressione dell'entropia) al variare di tutti gli altri parametri che definiscono lo stato del sistema; in questo caso, lo stato del sistema è definito dalle funzioni  $f_A$  ed  $f_B$ .

Come anticipato nell'introduzione, cerchiamo quindi gli stati stazionari dell'entropia di Boltzmann al variare delle funzioni  $f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  ed  $f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v})$  tra tutte le funzioni possibili, tenendo costanti l'energia totale, il volume del sistema e il numero di particelle di ciascuna componente separatamente.

In formule, oltre all'espressione (2.1) per l'entropia di Boltzmann  $S_b$ , a partire dalle funzioni  $f$  possiamo definire le seguenti quantità (la notazione è riassunta nella tabella 2.1):

$$\begin{aligned}\rho_A(\mathbf{r}) &= \int m_A f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v \\ \rho_B(\mathbf{r}) &= \int m_B f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d^3v\end{aligned}\tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}N_A &= \int f_A d^3r d^3v \\ N_B &= \int f_B d^3r d^3v\end{aligned}\tag{2.3}$$

$$\mathcal{T} = \int \frac{1}{2} m_A v^2 f_A d^3r d^3v + \int \frac{1}{2} m_B v^2 f_B d^3r d^3v\tag{2.4}$$

<sup>1</sup>Si intende che la funzione di distribuzione di equilibrio è un massimo locale del funzionale entropia nello spazio di tutte le funzioni di distribuzione.

$$\Omega = -\frac{G}{2} \int \frac{(\rho_A(\mathbf{r}) + \rho_B(\mathbf{r}))(\rho_A(\mathbf{r}') + \rho_B(\mathbf{r}'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' \quad (2.5)$$

$$E = \mathcal{T} + \Omega \quad (2.6)$$

Dove  $\rho_A$  e  $\rho_B$  sono le densità locali dei due gas,  $N_A$  ed  $N_B$  il numero di particelle totali di ciascuna componente,  $\mathcal{T}$  l'energia cinetica totale,  $\Omega$  l'energia potenziale gravitazionale totale ed  $E$  l'energia totale.

Utilizzando il metodo dei moltiplicatori di Lagrange, si trova che le funzioni che estremizzano l'entropia  $S_b$  tenendo  $E$ ,  $N_A$ ,  $N_B$  fissi<sup>2</sup> sono della forma:

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= A e^{-\theta \left[ \frac{m_A v^2}{2} + m_A \Phi(\mathbf{r}) \right]} \\ f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= B e^{-\theta \left[ \frac{m_B v^2}{2} + m_B \Phi(\mathbf{r}) \right]} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Dove  $A$ ,  $B$  e  $\theta$  sono delle costanti legate ai moltiplicatori di Lagrange, i quali in linea di principio si possono ricavare in funzione di  $E$ ,  $N_A$  ed  $N_B$  sostituendo le equazioni (2.7) nelle equazioni dei vincoli (2.6) e (2.3). Per quanto riguarda il parametro  $\theta$ , esso viene identificato con  $1/kT$  tramite un differente ragionamento [vedi formula (2.61) e spiegazioni sottostanti]. D'ora in poi assumeremo  $\theta = 1/kT$ .

Il potenziale gravitazionale è definito da

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int \frac{\rho_A(\mathbf{r}') + \rho_B(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' \quad (2.8)$$

$$= -G \int \frac{m_A f_A(\mathbf{r}', \mathbf{v}') + m_B f_B(\mathbf{r}', \mathbf{v}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r' d^3v'. \quad (2.9)$$

A questo punto per procedere e determinare  $\rho_A(\mathbf{r})$  e  $\rho_B(\mathbf{r})$  notiamo che se sostituiamo le equazioni (2.7) nelle (2.2) possiamo eseguire analiticamente l'integrale nelle velocità<sup>3</sup>; si ottengono quindi profili di densità della forma:

$$\rho_A(\mathbf{r}) = \rho_{Ac} e^{\theta m_A \Phi(\mathbf{0})} e^{-\theta m_A \Phi(\mathbf{r})} \quad (2.10)$$

$$\rho_B(\mathbf{r}) = \rho_{Bc} e^{\theta m_B \Phi(\mathbf{0})} e^{-\theta m_B \Phi(\mathbf{r})} \quad (2.11)$$

Dove si sono definite le costanti  $\rho_{Ac}$  e  $\rho_{Bc}$ , che si trovano facilmente in funzione di  $A$ ,  $B$  e  $\theta$ , così indicate perché rappresentano le densità centrali delle due componenti rispettivamente<sup>4</sup>. A questo punto l'equazione di Poisson richiede:

$$\nabla^2 \Phi(\mathbf{r}) = 4\pi G \left[ \rho_{Ac} e^{\theta m_A \Phi(\mathbf{0})} e^{-\theta m_A \Phi(\mathbf{r})} + \rho_{Bc} e^{\theta m_B \Phi(\mathbf{0})} e^{-\theta m_B \Phi(\mathbf{r})} \right]. \quad (2.12)$$

Se ora si eseguono i seguenti cambi di variabile, dove  $\psi$  è quindi una versione adimensionale del potenziale gravitazionale e  $\xi$  una versione adimensionale del raggio:

$$\psi(\mathbf{r}) \equiv \frac{\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(\mathbf{0})}{kT \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)}, \quad (2.13)$$

$$\xi \equiv \left[ \frac{4\pi G (\rho_{Ac} + \rho_{Bc})}{kT \left( \frac{1}{m_A} + \frac{1}{m_B} \right)} \right]^{\frac{1}{2}} \mathbf{r}, \quad (2.14)$$

l'equazione (2.12) diventa

$$\nabla^2 \psi(\xi) = \frac{\rho_{Ac}}{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}} e^{-\psi(\xi)(1 + \frac{m_A}{m_B})} + \frac{\rho_{Bc}}{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}} e^{-\psi(\xi)(1 + \frac{m_B}{m_A})} \quad (2.15)$$

<sup>2</sup>Il fatto che il volume venga tenuto costante lo si impone tramite gli estremi di integrazione degli integrali.

<sup>3</sup>In particolare:

$$\int_0^\infty e^{-\alpha v^2} 4\pi v^2 dv = \left( \frac{\pi}{\alpha} \right)^{\frac{3}{2}}$$

<sup>4</sup>si è assunto che le densità non divergano nell'origine.

Assumendo simmetria sferica, ricordando la forma del laplaciano in coordinate sferiche e introducendo le definizioni  $\beta \equiv m_B/m_A$  e  $\alpha \equiv \rho_{Bc}/\rho_{Ac}$  otteniamo la seguente equazione differenziale (il simbolo  $'$  indica derivata rispetto a  $\xi$  tenendo fisso  $\alpha$ ):

$$\boxed{\psi'' + \frac{2}{\xi}\psi' = \frac{1}{1+\alpha}e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}}e^{-(1+\beta)\psi}} \quad (2.16)$$

che è una equazione di Emden modificata. Le condizioni al contorno sono le seguenti:

$$\begin{cases} \psi(0) = 0 \\ \psi'(0) = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

dove la prima condizione segue dalla formula (2.13) mentre la seconda condizione segue dalla richiesta che le densità non presentino una cuspidè in  $r = 0$ .

Riassumiamo quanto ottenuto finora: fissati i valori dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$  possiamo trovare  $\psi$  dall'equazione (2.16). I profili di densità e le funzioni di distribuzione di equilibrio sono allora dati dalle seguenti formule:

$$\begin{aligned} \rho_A &= \rho_{Ac} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} \\ \rho_B &= \rho_{Bc} e^{-(1+\beta)\psi} \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\begin{aligned} f_A(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m_A v^2}{2kT}} \rho_A(r) \\ f_B(\mathbf{r}, \mathbf{v}) &= \frac{m_B^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m_B v^2}{2kT}} \rho_B(r) \end{aligned} \quad (2.19)$$

dove le costanti di normalizzazione delle funzioni di distribuzione sono state scelte in modo da soddisfare le (2.2).

La soluzione dell'equazione differenziale (2.16) con le condizioni al contorno (2.17) è una funzione monotona crescente; a titolo di esempio nella figura 2.1(a) viene mostrata la soluzione dell'equazione nel caso  $\beta = 3$  e  $\alpha = 2$ .

Osserviamo che possiamo considerare la soluzione dell'equazione (2.16) come una funzione di  $\xi$  e dei parametri  $\alpha$  e  $\beta$ :

$$\psi = \psi(\xi; \alpha, \beta)$$

Questa osservazione va tenuta presente quando si considerino sequenze di stati di equilibrio in cui vengono tenute fisse le masse totali  $M_A$  ed  $M_B$  al variare di  $\xi$  (vedi anche formula (2.46) e spiegazioni sottostanti).

Facciamo ora alcune osservazioni sull'andamento della densità e sulle funzioni di distribuzione di equilibrio ottenute. Le distribuzioni di equilibrio soddisfano l'equipartizione globale dell'energia, cioè l'uguaglianza dell'energia cinetica media per particella. La conseguenza di questo fatto è che le particelle più pesanti vanno mediamente più piano, e ci si può quindi aspettare che saranno segregate verso il centro dell'ammasso. Si trova riscontro di questo nelle formule (2.18): i profili di densità sono entrambi esponenziali decrescenti a partire dal centro, ma hanno due esponenti diversi che dipendono dai rapporti tra le masse di singola particella  $\beta$ . Il rapporto tra la densità della componente  $B$  e quello della componente  $A$  vale:

$$\frac{\rho_B(r)}{\rho_A(r)} = \alpha e^{-\frac{\beta^2-1}{\beta}\psi} \quad (2.20)$$

È noto che la massa totale di una sfera isoterma non confinata (senza bordo) è infinita (vedi [9]); come si può mostrare (si veda [40]) utilizzando le formule per le masse e per lo sviluppo asintotico della soluzione dell'equazione di Emden modificata (rispettivamente paragrafo 2.1.2.2, formule 2.41, e paragrafo 2.1.2.1) una conseguenza della segregazione di massa è che se il rapporto fra le masse di singola particella è abbastanza grande, superiore a  $\beta = 3/2$ , la massa totale della componente più massiccia è finita anche per una sfera non confinata. Nella figura 2.1(c) sono mostrati i profili di densità per il caso  $\beta = 3$  e  $\alpha = 2$ .



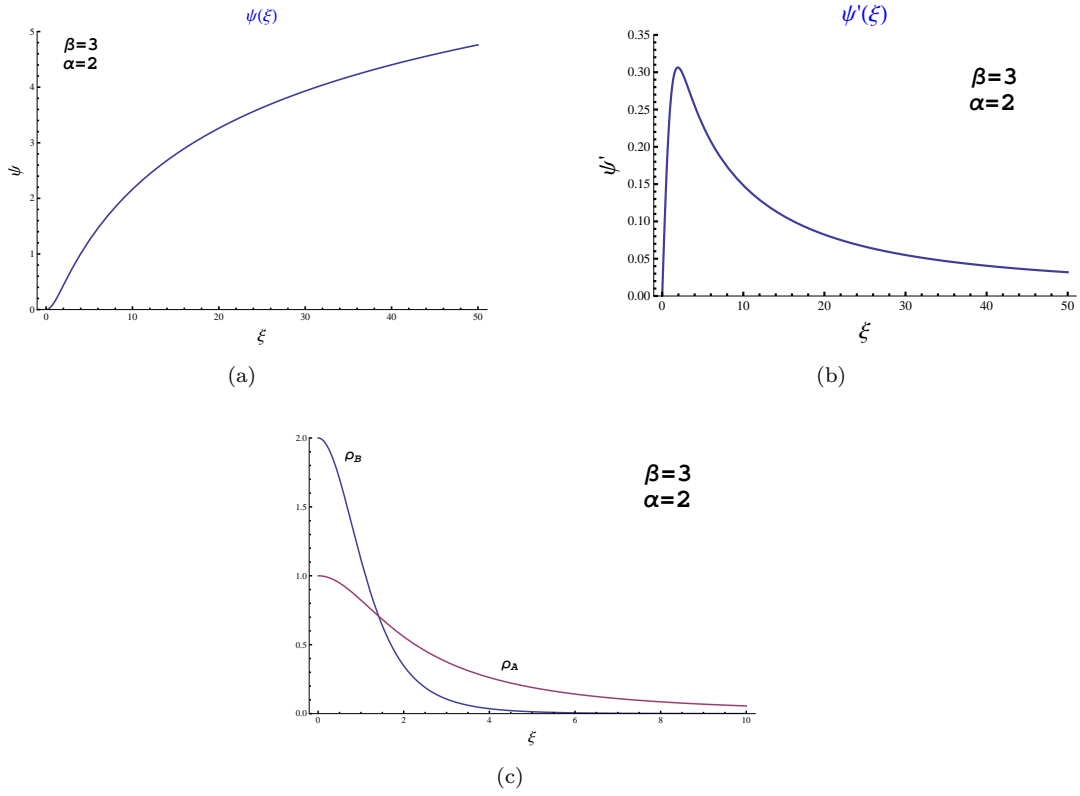


Figura 2.1: (a) Soluzione dell'equazione (2.16) nel caso particolare  $\beta = 3$  e  $\alpha = 2$ . (b) Derivata del grafico della parte (a). (c) Profili di densità per  $\beta = 3$  e  $\alpha = 2$ , normalizzati alla densità centrale della componente A.

Una osservazione che ci sarà utile in seguito, quando studieremo la stabilità termodinamica del sistema, è la seguente: si può mostrare che (vedi ad esempio [32], appendice A) assumendo profili di densità dati (non necessariamente di equilibrio), che le funzioni di distribuzione (2.19) sono quelle che massimizzano l'entropia di Boltzmann fissata l'energia totale e fissate le funzioni  $\rho_A(r)$  e  $\rho_B(r)$ . Vale a dire che, fissate le densità in ciascun punto, la funzione di distribuzione che massimizza l'entropia è quella che ha distribuzione di velocità localmente Maxwelliana, il che è un risultato atteso perché utilizzare l'entropia di Boltzmann significa trascurare le correlazioni e trattare localmente il gas come un gas perfetto.

Mostriamo ora che l'approccio cinetico fin qui considerato è perfettamente equivalente a quello fluido, nel senso che partendo da uno o dall'altro si ottengono le stesse espressioni per i profili di densità, per l'energia totale del gas, per l'entropia, e così via. Nell'approccio fluido si studiano le condizioni di equilibrio idrostatico, assumendo simmetria sferica del sistema. Le equazioni di partenza sono quindi le seguenti:

$$\frac{GM(r)\rho_A}{r^2} = -\frac{dP_A}{dr}; \quad \frac{GM(r)\rho_B}{r^2} = -\frac{dP_B}{dr} \quad (2.21)$$

$$P_A = \frac{\rho_A}{m_A}kT; \quad P_B = \frac{\rho_B}{m_B}kT \quad (2.22)$$

$$\frac{dM(r)}{dr} = (\rho_A + \rho_B)4\pi r^2. \quad (2.23)$$

Le (2.21), dove  $P$  sono le pressioni delle due componenti e gli altri simboli hanno lo stesso significato che nell'approccio cinetico, sono la condizione di equilibrio idrostatico, le (2.22) sono le equazioni di stato dei due gas, dove  $T$  è considerato un parametro costante<sup>5</sup>, la (2.23) lega la massa alle densità. Per la notazione si veda anche la tabella 2.1.

Partendo dalle formule ottenute con l'approccio cinetico e definendo le pressioni nel seguente modo:

$$P_x(r) \equiv \int \frac{1}{3} f_x m v^2 d^3v \quad (2.24)$$

dove  $x$  sta per una qualsiasi tra  $A$  e  $B$ , si verifica facilmente per sostituzione che le equazioni (2.21), (2.22) e (2.23) sono soddisfatte. Viceversa è possibile mostrare che partendo da queste tre equazioni, si ottiene l'equazione (2.16) e i profili di densità (2.18).

Discutiamo ora come si ottiene il limite a una componente. Scegliere  $\alpha = 0$  significa che la densità centrale, e di conseguenza ovunque, della componente  $B$  è nulla: questo caso rappresenta il limite a una componente, indipendentemente dal valore di  $\beta$ . Nel caso  $\alpha = 0$  e  $\beta = \infty$  (non importa in quale ordine si sceglie di effettuare il limite) le nostre definizioni dei parametri adimensionali coincidono con quelle utilizzate da Lynden-Bell e Wood, in particolare per raggio adimensionale  $\xi$ . Anche il caso  $\beta = 1$  e  $\alpha$  generico rappresenta il limite a una componente: infatti in questo caso le due componenti hanno la stessa massa di singola particella e quindi la distinzione tra le due è solo formale: i profili di densità sono gli stessi che nel caso a una componente. L'entropia di Boltzmann dello stesso sistema considerato ad una sola componente o da due componenti identiche è diversa per una costante (si tratta del paradosso di Gibbs, si veda ad esempio [16]), ma poiché questo non influenza lo stato fisico del sistema a cui si instaurano le instabilità termodinamiche, nel seguito non ci occuperemo di queste questioni legate al paradosso di Gibbs. Per confrontare più facilmente le formule e i grafici con quelli di precedenti lavori, definiamo d'ora in poi come limite a una componente il caso  $\beta = \infty$  e  $\alpha = 0$ .

---

<sup>5</sup> Osservazione: siccome la temperatura e la massa di singola particella entrano solo tramite il loro rapporto nell'approccio fluido, è solo quest'ultimo che conta (è la velocità termica). Quindi considerare temperature diverse e masse uguali è equivalente a considerare temperature uguali e masse diverse.

**2.1.2.1 Forma Asintotica della Soluzione all'Equazione di Emden Modificata**

In questa Sezione deriviamo il comportamento asintotico della soluzione dell'equazione (2.16) per  $\xi \rightarrow \infty$ . Riscriviamo l'equazione nel seguente modo:

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 \psi') = \xi^2 \left[ \frac{1}{1+\alpha} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} + \frac{1}{1+\frac{1}{\alpha}} e^{-(1+\beta)\psi} \right] \quad (2.25)$$

poiché il membro a destra è positivo, la quantità  $\xi^2 \psi'$  essendo positiva per<sup>6</sup>  $\xi \ll 1$ , rimarrà sempre positiva per  $\xi > 0$ . Dunque anche  $\psi'$  è positivo, di conseguenza  $\psi$  è monotona crescente. Mostriamo ora che  $\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi = \infty$ . Supponiamo per assurdo che  $\psi \rightarrow M$  finito. Allora la parte tra parentesi del membro destro dell'equazione (2.25) è sempre maggiore di una costante positiva  $C$ . Possiamo dunque scrivere

$$\frac{d}{d\xi} (\xi^2 \psi') > \xi^2 C \quad (2.26)$$

Integrando a destra e sinistra si trova che  $\psi' \rightarrow \infty$  e quindi  $\psi \rightarrow \infty$ , contrariamente all'ipotesi e quindi si ottiene un assurdo.

Abbiamo dunque dimostrato che  $\psi$  è monotona crescente e che

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \psi(\xi) = \infty \quad (2.27)$$

Osserviamo che questo implica che per grandi  $\xi$  il secondo termine nella parentesi del membro a destra della (2.25), che rappresenta il contributo delle particelle più massive, sarà sempre meno importante per raggi grandi. Ricaviamo ora l'espressione asintotica della soluzione. Senza perdita di generalità<sup>7</sup> consideriamo il caso  $\beta > 1$ . Introducendo  $\Psi = (1 + 1/\beta)\psi$  e  $\eta^2 = (1 + 1/\beta)/(1 + \alpha)\xi^2$  l'equazione (2.25) si riduce alla seguente:

$$\frac{d^2 \Psi}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta} \frac{d\Psi}{d\eta} = e^{-\Psi} + \alpha e^{-\beta\Psi} \quad (2.28)$$

Il comportamento asintotico di questa equazione si può ottenere eseguendo la seguente sostituzione ([9], [40]):

$$z = \log \eta \quad (2.29)$$

$$u = -\Psi + 2z - \log 2 \quad (2.30)$$

L'equazione (2.28) diventa:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + 2e^u + \alpha 2^\beta e^{\beta u - 2\beta z + 2z} - 2 = 0 \quad (2.31)$$

Il penultimo termine del membro a sinistra diventa trascurabile rispetto al terz'ultimo per  $z \rightarrow \infty$ : ciò si mostra utilizzando la definizione del cambio di variabile (2.30) e il fatto che  $\psi \rightarrow \infty$  per  $z \rightarrow \infty$ . L'equazione (2.31) priva del penultimo termine è l'equazione di un'oscillatore smorzato in un potenziale non armonico. Il moto quindi si smorza fino a oscillare sempre meno attorno al minimo del potenziale, che si trova in  $u = 0$ . Possiamo dunque sviluppare al primo ordine in  $u$  l'equazione (2.31) ottenendo:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + 2u + \alpha 2^\beta (\beta u + 1) e^{-2(\beta-1)z} = 0 \quad (2.32)$$

poiché  $u \rightarrow 0$  possiamo trascurare il termine  $\beta u$  nella parentesi, e l'equazione diventa:

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + \frac{du}{dz} + 2u + \alpha 2^\beta e^{-2(\beta-1)z} = 0 \quad (2.33)$$

<sup>6</sup>questo è facilmente dimostrabile se si cerca un'espressione per  $\psi$  per  $\xi \ll 1$  della forma  $\psi \simeq A\xi^2$  dove  $A$  è una costante. Sostituendo nell'equazione differenziale si trova che  $A > 0$ .

<sup>7</sup>mandando  $\alpha$  e  $\beta$  nei loro reciproci si ottiene la stessa situazione fisica, solo coi nomi delle componenti invertiti.

La soluzione generale di questa equazione è

$$u(z) = \frac{1}{2}e^{-z/2} \left[ 2A \cos \left( \frac{\sqrt{7}z}{2} + \varphi \right) - \frac{\alpha 2^\beta e^{(\frac{5}{2}-2\beta)z}}{\beta(2\beta-5)+4} \right], \quad (2.34)$$

dove  $A$  e  $\varphi$  sono due costanti di integrazione. Da questa si può ottenere lo sviluppo asintotico di  $\Psi$ . Otteniamo ora lo sviluppo asintotico nel limite di una sola componente, in cui  $\alpha = 0$ . L'equazione (2.34) diventa:

$$Ae^{-z/2} \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2}z + \varphi \right). \quad (2.35)$$

Riscrivendo in termini delle variabili  $\Psi$  ed  $\eta$  otteniamo:

$$\Psi(\eta) = 2 \log \eta - \frac{A \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \eta + \varphi \right)}{\sqrt{\eta}} - \log 2 \quad (\eta \rightarrow \infty). \quad (2.36)$$

Notiamo che nel caso  $\beta = \infty$  e  $\alpha = 0$ , scelta che abbiamo fatto per definire il limite a una componente, si ottiene  $\Psi = \psi$  e  $\xi = \eta$ . Dalla (2.36) si ottengono anche le seguenti, che ci saranno utili in seguito:

$$\psi' = \frac{2}{\eta} + \frac{\sqrt{7}A \sin \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \eta + \varphi \right)}{2\eta^{3/2}} + \frac{A \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \eta + \varphi \right)}{2\eta^{3/2}} \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (2.37)$$

$$e^{-\psi} = \frac{2}{\eta^2} + \frac{2A \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \eta + \varphi \right)}{\eta^{5/2}}. \quad (\eta \rightarrow \infty) \quad (2.38)$$

Da quest'ultima equazione si deduce che la densità a grandi distanze è proporzionale a  $1/r^2$  (si veda la formula (2.18))

### 2.1.2.2 Calcolo di Alcune Quantità Fisiche

In questa Sezione calcoliamo formule di riferimento di quantità fisiche. La variabile adimensionale  $\xi$  raggiungerà il suo valore massimo, che chiamiamo  $\Xi$ , in corrispondenza di  $r = R$ . Dalla (2.14) e definendo  $\tau_x = kT/4\pi Gm_x$  vediamo che è:

$$\Xi^2 = \frac{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}}{\tau_A + \tau_B} R^2 \quad (2.39)$$

Possiamo usare  $\Xi$  come uno dei parametri adimensionali che caratterizzano gli stati di equilibrio del sistema.

### Masse

Le masse delle due componenti sono

$$M_A = \int_0^R 4\pi r^2 \rho_A dr \quad (2.40)$$

$$\stackrel{(2.18)}{=} \int_0^R 4\pi r^2 \rho_{Ac} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} dr \quad (2.41)$$

$$\stackrel{(2.14)}{=} 4\pi \rho_{Ac} \left[ \frac{\tau_A + \tau_B}{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}} \right]^{\frac{3}{2}} \int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} d\xi \quad (2.42)$$

$$\stackrel{(2.39)}{=} 4\pi (\tau_A + \tau_B) \frac{1}{1+\alpha} \frac{R}{\Xi} \int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} d\xi. \quad (2.43)$$

Si ottiene per  $M_B$  una formula analoga<sup>8</sup>; in definitiva abbiamo:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{M_A}{4\pi(\tau_A + \tau_B)R} &= \frac{1}{1 + \alpha} \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} d\xi \\ \frac{M_B}{4\pi(\tau_A + \tau_B)R} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \frac{1}{\Xi} \int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\beta)\psi} d\xi\end{aligned}} \quad (2.44)$$

Queste ultime formule forniscono una versione adimensionale delle masse come funzione dei parametri adimensionali del sistema; notiamo che sono funzioni solo di tre  $\{\alpha, \beta, \Xi\}$  dei quattro parametri indipendenti  $\{\alpha, \beta, \Xi, \frac{M_a}{m_a}\}$ . Per la massa totale  $M = M_A + M_B$  si può integrare direttamente utilizzando il teorema di Gauss (vedi formula (2.16)) e si ottiene:

$$\boxed{\frac{M}{4\pi(\tau_A + \tau_B)R} = \Xi \psi'(\Xi; \alpha, \beta)} \quad (2.45)$$

Dividendo la seconda delle (2.44) per la prima otteniamo:

$$\boxed{\frac{M_B}{M_A} = \frac{M_B}{M_A}(\alpha, \beta, \Xi) = \alpha \frac{\int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\beta)\psi(\xi; \alpha, \beta)} d\xi}{\int_0^\Xi \xi^2 e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi(\xi; \alpha, \beta)} d\xi} \Rightarrow \alpha = \alpha(\beta, \Xi, \frac{M_B}{M_A})} \quad (2.46)$$

L'equazione (2.46) può essere in linea di principio invertita per trovare  $\alpha$  come funzione di  $\beta, \Xi, M_B/M_A$ . Questo ci sarà utile in futuro: vorremo ad esempio analizzare le isoterme, ovvero analizzare un sistema con  $T, m_A, m_B, M_A$  ed  $M_B$  fissati facendo variare  $R$ . Per realizzare una tale serie di equilibri dovremo tenere conto che oltre al parametro  $\Xi$  dovremo variare anche  $\alpha$  secondo quanto dato dalla relazione (2.46).

### Pressioni

La pressione della componente  $A$  è:

$$P_A \stackrel{(2.22)}{=} \rho_A \frac{kT}{m_A} \stackrel{\text{def. di } \tau}{=} 4\pi G \tau_A \rho_A \stackrel{(2.18)}{=} 4\pi G \tau_A \rho_{Ac} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} \quad (2.47)$$

$$= 4\pi G \frac{\tau_A + \tau_B}{1 + \frac{1}{\beta}} \frac{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}}{1 + \alpha} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} \quad (2.48)$$

$$\stackrel{(2.39)}{=} 4\pi G (\tau_A + \tau_B)^2 \frac{\Xi^2}{R^2} \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} \frac{1}{1 + \alpha} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi} \quad (2.49)$$

In definitiva abbiamo per le pressioni, in forma adimensionale<sup>9</sup>:

$$\boxed{\begin{aligned}\frac{P_A}{4\pi G (\tau_A + \tau_B)^2 / R^2} &= \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} \frac{1}{1 + \alpha} \Xi^2 e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi(\Xi, \alpha, \beta)} \\ \frac{P_B}{4\pi G (\tau_A + \tau_B)^2 / R^2} &= \frac{1}{1 + \beta} \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} \Xi^2 e^{-(1+\beta)\psi(\Xi, \alpha, \beta)}\end{aligned}} \quad (2.50)$$

Che, come le masse, dipendono da soli tre dei quattro parametri adimensionali.

### Energia

Assumendo una distribuzione localmente Maxwelliana delle velocità a temperatura  $T$  e una densità totale  $\rho$  arbitraria (non necessariamente di equilibrio) l'energia totale vale:

$$\boxed{E = \mathcal{T} + \Omega = \frac{3}{2} N_A kT + \frac{3}{2} N_B kT + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r} \quad (2.51)$$

<sup>8</sup>per simmetria  $A \rightarrow B$  equivale a  $\beta \rightarrow \frac{1}{\beta}$  e  $\alpha \rightarrow \frac{1}{\alpha}$

<sup>9</sup>indichiamo indistintamente con  $P_A$  e  $P_B$  le pressioni al bordo della scatola o quelle all'interno; sarà chiaro dal contesto quale delle due si intenda

Nel caso in cui la distribuzione di densità sia quella di equilibrio possiamo utilizzare il teorema del viriale per scrivere:

$$\Omega = 3PV - 2\mathcal{T} \quad (2.52)$$

Per cui l'energia totale per gli stati di equilibrio è:

$$\boxed{E = \mathcal{T} + \Omega = 3PV - \mathcal{T}}. \quad (2.53)$$

Possiamo riscrivere questa equazione in un'altra forma; usando le (2.50) in cui sostituiamo  $\tau_A + \tau_B$  preso dalla (2.45) abbiamo:

$$3PV = \frac{GM^2}{R} \frac{1}{(\psi'(\Xi, \alpha, \beta))^2} \left[ \frac{1}{(1+\alpha)(1+\frac{1}{\beta})} e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi(\Xi, \alpha, \beta)} + \frac{1}{(1+\frac{1}{\alpha})(1+\beta)} e^{-(1+\beta)\psi(\Xi, \alpha, \beta)} \right]. \quad (2.54)$$

Il termine  $\mathcal{T}$  lo possiamo riscrivere sempre ricavando  $\tau_A + \tau_B$  dalla (2.45):

$$\mathcal{T} = \frac{3}{2}kT \left[ \frac{M_A}{m_A} + \frac{M_B}{m_B} \right] = \frac{3}{2}4\pi G(\tau_A + \tau_B) \left( \frac{M_A}{1+\frac{1}{\beta}} + \frac{M_B}{1+\beta} \right) \quad (2.55)$$

$$\stackrel{(2.45)}{=} \frac{3}{2} \frac{GM}{R} \frac{1}{\Xi\psi'(\Xi, \alpha, \beta)} \left( \frac{M_A}{1+\frac{1}{\beta}} + \frac{M_B}{1+\beta} \right). \quad (2.56)$$

Otteniamo quindi la seguente formula per l'energia all'equilibrio:

$$\boxed{\frac{E}{GM^2/R} = \frac{1}{(\psi'(\Xi, \alpha, \beta))^2} \left[ \frac{e^{-(1+\frac{1}{\beta})\psi(\Xi, \alpha, \beta)}}{(1+\alpha)(1+\frac{1}{\beta})} + \frac{e^{-(1+\beta)\psi(\Xi, \alpha, \beta)}}{(1+\frac{1}{\alpha})(1+\beta)} \right] - \frac{3}{2} \frac{1}{\Xi\psi'(\Xi, \alpha, \beta)} \left[ \frac{M_A}{M(1+\frac{1}{\beta})} + \frac{M_B}{M(1+\beta)} \right]} \quad (2.57)$$

La combinazione  $E/(GM^2/R)$ , come le masse e le pressioni, è funzione di soli 3 dei 4 parametri adimensionali indipendenti.

### Entropia

Calcoliamo l'entropia di Boltzmann sostituendo nella definizione (2.1) le funzioni di distribuzione (2.19). Essa rappresenta l'entropia di un gas che ha distribuzione di velocità localmente Maxwelliana a temperatura  $T$  e data distribuzione di densità (non necessariamente di equilibrio). Il contributo del gas  $A$  è

$$\frac{S_{bA}}{k} = - \int f_A \log f_A d^3r d^3v \quad (2.58)$$

$$\stackrel{(2.19)}{=} - \int \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m_A v^2}{2kT}} \rho_A \log \left( \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{m_A v^2}{2kT}} \rho_A \right) d^3r d^3v \quad (2.59)$$

$$= - \log \left( \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{M_A}{m_A} + \frac{3}{2} \frac{M_A}{m_A} - \frac{1}{m_A} \int \rho_A \log \rho_A d^3r \quad (2.60)$$

In definitiva quindi per l'entropia totale si ha:

$$\boxed{\frac{S_b}{k} = \frac{M_A}{m_A} \left[ \frac{3}{2} - \log \left( \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] + \frac{M_B}{m_B} \left[ \frac{3}{2} - \log \left( \frac{m_B^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] - \frac{1}{m_A} \int \rho_A \log \rho_A d^3r - \frac{1}{m_B} \int \rho_B \log \rho_B d^3r} \quad (2.61)$$

Se si vuole calcolare l'entropia per gli stati di equilibrio si sostituiscono in questa formula i profili di densità di equilibrio.

Torniamo ora alla questione riguardante l'identificazione del moltiplicatore di Lagrange  $\theta$  introdotto nella formula (2.7) con  $1/kT$  nell'approccio cinetico. Questa identificazione si basa sull'osservazione che il sistema dei due gas costituisce un sistema termodinamico per il quale è possibile effettuare trasformazioni reversibili quasi statiche tra una configurazione di equilibrio e l'altra, e che durante queste trasformazioni si può applicare la definizione termodinamica classica di entropia che prescinde dalla meccanica statistica,

$$dS_c = \frac{dQ}{T} \quad (2.62)$$

Per identificare  $S_c$  con  $S_b$  si procede nel seguente modo (si veda Lynden-Bell & Wood, Appendice I, per ulteriori dettagli nel caso a una componente):

1. Si considera un sistema con  $M_A$ ,  $M_B$ ,  $m_A$ ,  $m_B$  fissati e si immagina di eseguire una trasformazione termodinamica reversibile (per esempio un'isoterma, un'adiabatica, un'isobara, o una trasformazione generica);
2. si calcola il calore assorbito  $dQ = dE + PdV$  utilizzando le formule (2.57), (2.50);
3. si calcola il  $dS_b$  utilizzando la formula (2.61) con le densità di equilibrio;
4. se si verifica che  $TdS_b = dQ$  si può identificare  $\theta$  con  $1/kT$ .

Notiamo che avremmo potuto usare questa procedura per definire l'entropia a partire dall'approccio fluido senza mai fare menzione dell'entropia di Boltzmann,<sup>10</sup> bensì utilizzando solo la relazione termodinamica  $TdS = dQ$  applicata al sistema.

### Energia Libera di Helmholtz, di Gibbs ed Entalpia

L'energia di Helmholtz è definita da

$$\boxed{\mathcal{F} = E - TS_b} \quad (2.63)$$

L'energia libera di Gibbs da

$$\boxed{\mathcal{G} = E - TS_b + PV} \quad (2.64)$$

L'entalpia da

$$\boxed{\mathcal{H} = E + PV} \quad (2.65)$$

I diversi potenziali termodinamici ci saranno utili per investigare la stabilità termodinamica del sistema per diverse condizioni al contorno.

---

<sup>10</sup>Usando come definizione per l'energia  $E = \frac{3}{2}NkT + \Omega$

## 2.2 Caso di Una Componente

In questa Sezione vogliamo analizzare gli stati di equilibrio nel caso di una sola componente. Come abbiamo visto, questo limite è ottenibile in diversi modi; qui scegliamo quello che porta ad avere definizioni dei parametri coincidenti a quelle di Lynden-Bell e Wood, cioè  $\alpha \rightarrow 0$  e  $\beta \rightarrow \infty$ . Omettiamo il suffisso  $A$  perché superfluo. La stabilità termodinamica e dinamica del sistema verrà analizzata in un capitolo successivo. Le equazioni (2.16), (2.18), (2.19), (2.45), (2.50), (2.57), (2.61) diventano così:

$$\psi'' + \frac{2}{\xi}\psi' = e^{-\psi} \quad (2.66)$$

$$\rho(\xi) = \rho_c e^{-\psi(\xi)} \quad (2.67)$$

$$f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mv^2}{2kT}} \rho(r) \quad (2.68)$$

$$M = 4\pi\tau R \Xi \psi'(\Xi) \quad (2.69)$$

$$P = 4\pi G \tau^2 \frac{\Xi^2}{R^2} e^{-\psi(\Xi)} \quad (2.70)$$

$$\frac{E}{GM^2/R} = \frac{e^{-\psi(\Xi)}}{\psi'(\Xi)^2} - \frac{3}{2} \frac{1}{\Xi \psi'(\Xi)} \quad (2.71)$$

$$\frac{S_b}{k} = \frac{M}{m} \left[ \frac{3}{2} - \log \left( \frac{m^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \right] - \frac{1}{m} \int \rho \log \rho \, d^3r \quad (2.72)$$

Le quantità indipendenti necessarie per specificare lo stato di equilibrio del sistema passano da 6 a 4: due scale dimensionali e due parametri adimensionali.

Per il caso di una componente possiamo riscrivere l'entropia di equilibrio in una forma alternativa. La formula (2.13) per il caso di una componente diventa:

$$\psi(\mathbf{r}) = \frac{\Phi(\mathbf{r}) - \Phi(0)}{\frac{kT}{m}}, \quad (2.73)$$

poiché nel punto  $r = R$  esiste un bordo fisico oltre il quale la densità è nulla, possiamo prendere il potenziale gravitazionale che nullo all'infinito. Al bordo vale quindi che:

$$\Phi(R) = -\frac{GM}{R}, \quad (2.74)$$

da cui abbiamo:

$$\Phi(0) = -\psi(R) \frac{kT}{m} - \frac{GM}{R}; \quad (2.75)$$

dunque riscrivere l'ultimo termine a destra nella formula (2.72):

$$\int \rho \log \rho \, d^3r \stackrel{(2.67)}{=} \int \rho \log \rho_c e^{-\psi} \, d^3r = \int \rho \log \rho_c e^{-\psi} \, d^3r \quad (2.76)$$

$$= \int \rho \log \rho_c \, d^3r - \int \rho \psi \, d^3r \quad (2.77)$$

$$\stackrel{(2.73)}{=} M \log \rho_c - \frac{m}{kT} \int \rho \Phi \, d^3r + \frac{m}{kT} \int \rho \Phi(0) \, d^3r \quad (2.78)$$

$$\stackrel{2\Omega = \int \rho \Phi \, d^3r}{=} M \log \rho_c - 2 \frac{m}{kT} \Omega + \Phi(0) \frac{m}{kT} M \quad (2.79)$$

$$\stackrel{(2.75)}{=} M \log \rho_c - 2 \frac{m}{kT} \Omega - \psi(\Xi) M - \frac{GM^2}{R} \frac{m}{kT} \quad (2.80)$$



Sostituendo quest'ultima espressione nella (2.72), usando  $\Omega = E - \mathcal{T} = E - \frac{3}{2}MkT/m$ , poi utilizzando prima la (2.39) per eliminare  $\rho_c$ , poi la (2.69) per eliminare  $kT$  otteniamo la seguente espressione per l'entropia:

$$\boxed{\begin{aligned} \frac{m}{M} \frac{S}{k} = & -\log \left[ \Xi^2 F(\Xi)^{\frac{1}{2}} \right] + 2 \frac{E}{\frac{GM^2}{R}} F(\Xi) + \psi(\Xi) + F(\Xi) - 3 \\ & + \log \left[ m(2\pi)^{\frac{3}{2}} R^{\frac{3}{2}} 4\pi G^{\frac{3}{2}} M^{\frac{1}{2}} \right] \end{aligned}} \quad (2.81)$$

Dove  $F(\xi) \equiv \xi \psi'(\xi)$  e la combinazione  $E/(GM^2/R)$  dipende solo da  $\Xi$  ed è data dalla formula (2.71). Cominciamo ora a mettere in evidenza alcune caratteristiche inusuali degli stati di equilibrio studiando alcune alcuni grafici.

### 2.2.1 Grafici

In questa Sezione mostriamo dei grafici; essi consentiranno di identificare i valori dei parametri a cui si instaurano le varie instabilità. Illustriamo la notazione con un esempio:  $P(R)_{T,M}$  significa “ $P$  in funzione di  $R$  tenendo  $M, T$  fissati”. Mostriamo come si costruiscono i grafici nel caso particolare delle isoterme; gli altri si costruiscono in modo analogo.

#### Costruzione delle Isoterme

Consideriamo un sistema con  $M$  e  $T$  fissati; per definire un particolare stato di equilibrio manca solo di assegnare il valore di un'altra variabile, ad esempio la pressione  $P$  al bordo della scatola. Per costruire le isoterme, che sono le curve  $P(R)$  a  $M$  e  $T$  fissati, utilizziamo la formule (2.70) e (2.69). Si procede nel seguente modo: si ricava  $R$  dalla (2.69) e lo si sostituisce nella (2.70) per ottenere

$$P = P(\Xi; M, \tau).$$

La (2.69) può essere letta come

$$R = R(\Xi; M, \tau).$$

Queste due equazioni definiscono in modo parametrico al variare di  $\Xi$  il grafico voluto, rappresentato nella figura 2.2(a).

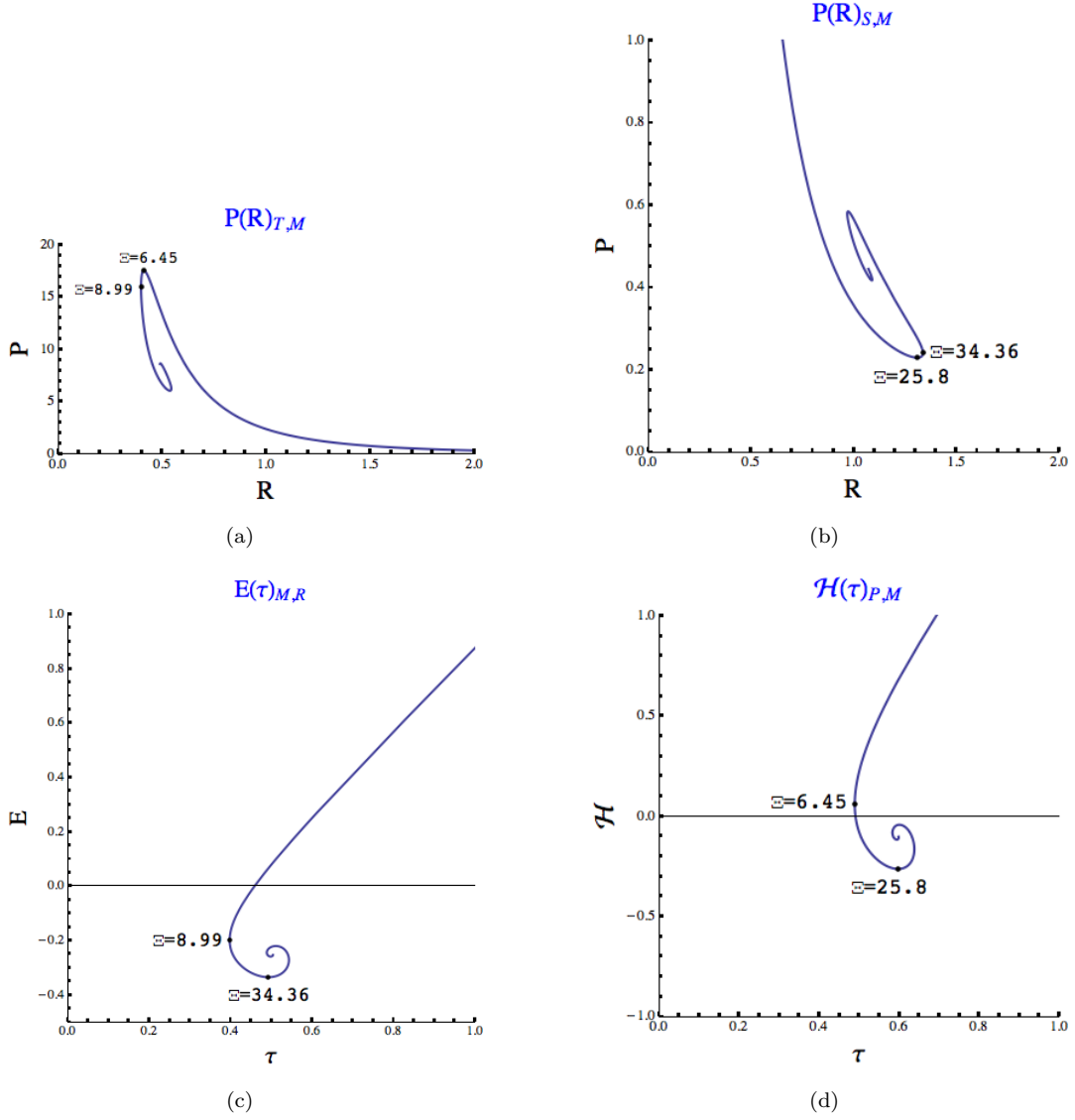


Figura 2.2: Da questi quattro grafici si desumono i valori di  $\Xi$  a cui si instaurano le varie instabilità utilizzando il metodo delle serie lineari di Poincarè, come descritto nella Sottosezione 3.2.2. Notare che aumentare  $\Xi$ , il parametro adimensionale che caratterizza il sistema, non sempre corrisponde ad aumentare il raggio reale del sistema, anche quando gli effetti della gravità sono poco importanti (piccoli  $\Xi$ ): ad esempio, partendo da piccoli  $\Xi$ , nell'isoterma (a) aumentare  $\Xi$  corrisponde a diminuire  $R$ , mentre nell'adiabatica (b) è vero il contrario. (a) Isotherma. Pressione  $P$  in unità di  $(4\pi)^3 G \tau^4 / M^2$ , raggio  $R$  in unità di  $M / 4\pi \tau$ . (b) Adiabatica.  $P$  ed  $R$  sono in unità adimensionali, che però dipendono dallo specifico valore di  $S_b$  che è arbitrario per addizione di costanti e quindi non sono riportate. Tutte le adiabatiche hanno la stessa forma a meno di riscaldamento. (c) La pendenza di questo grafico rappresenta il calore specifico.  $E$  in unità di  $GM^2/R$ ,  $\tau$  in unità di  $M/4\pi R$ . (d)  $\mathcal{H}$  in unità di  $(4\pi PG^3 M^6)^{1/4}$ ,  $\tau$  in unità di  $[M^2/(4\pi)^3 P]^{1/4}$ .

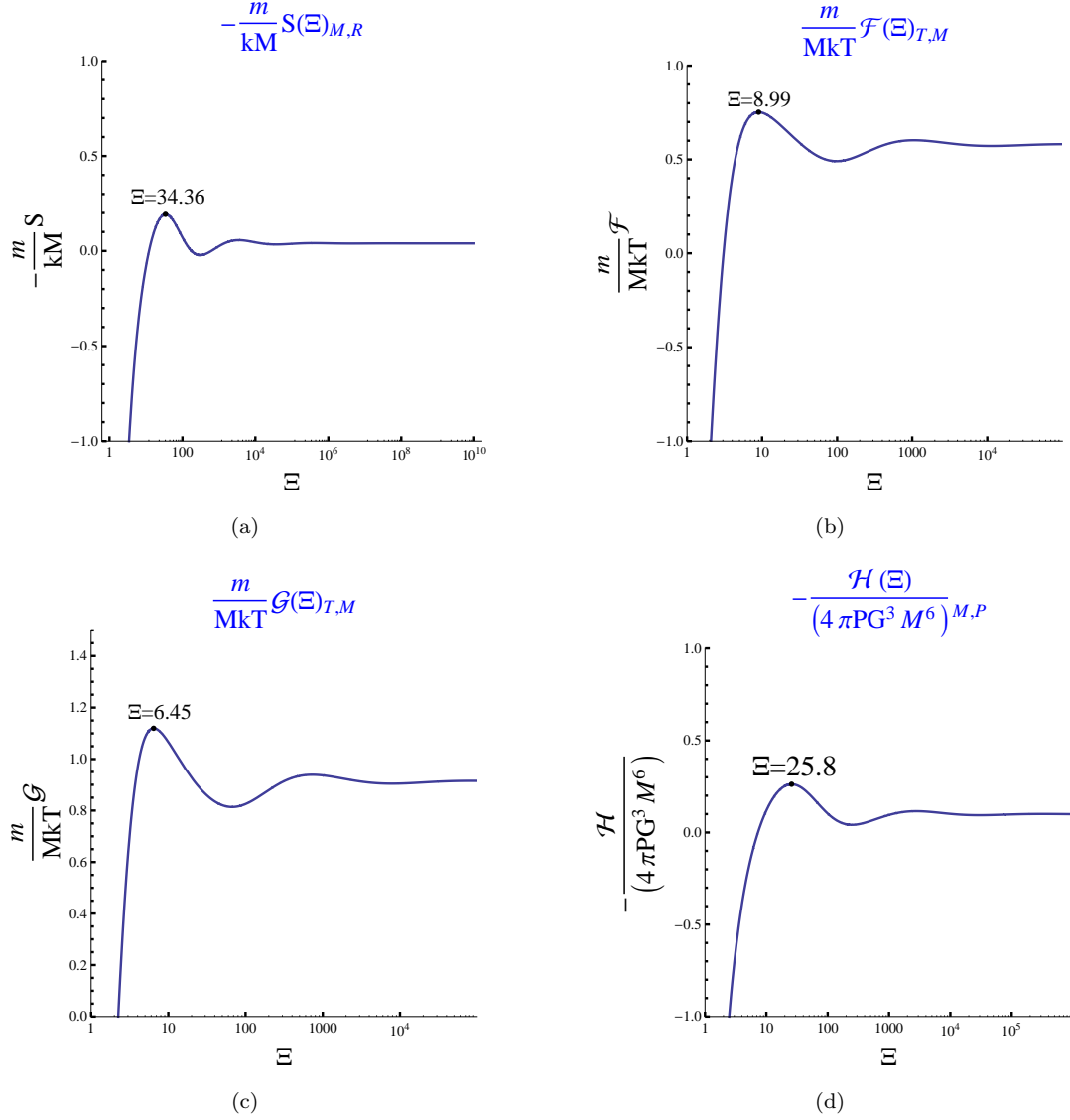


Figura 2.3: Come illustrato nella Sottosezione 3.2.2, i quattro potenziali termodinamici permettono di trovare i punti a cui si instaurano le instabilità per quattro diverse possibili scelte delle condizioni al contorno: essi sono i punti del primo “turn over” dei potenziali. (a) Entropia. Si basa sulla formula (2.81); i termini che non coinvolgono  $\Xi$  possono essere considerati costanti e sono stati omessi dal grafico. (b) Energia libera di Helmholtz. (c) Energia libera di Gibbs. (d) Entalpia.

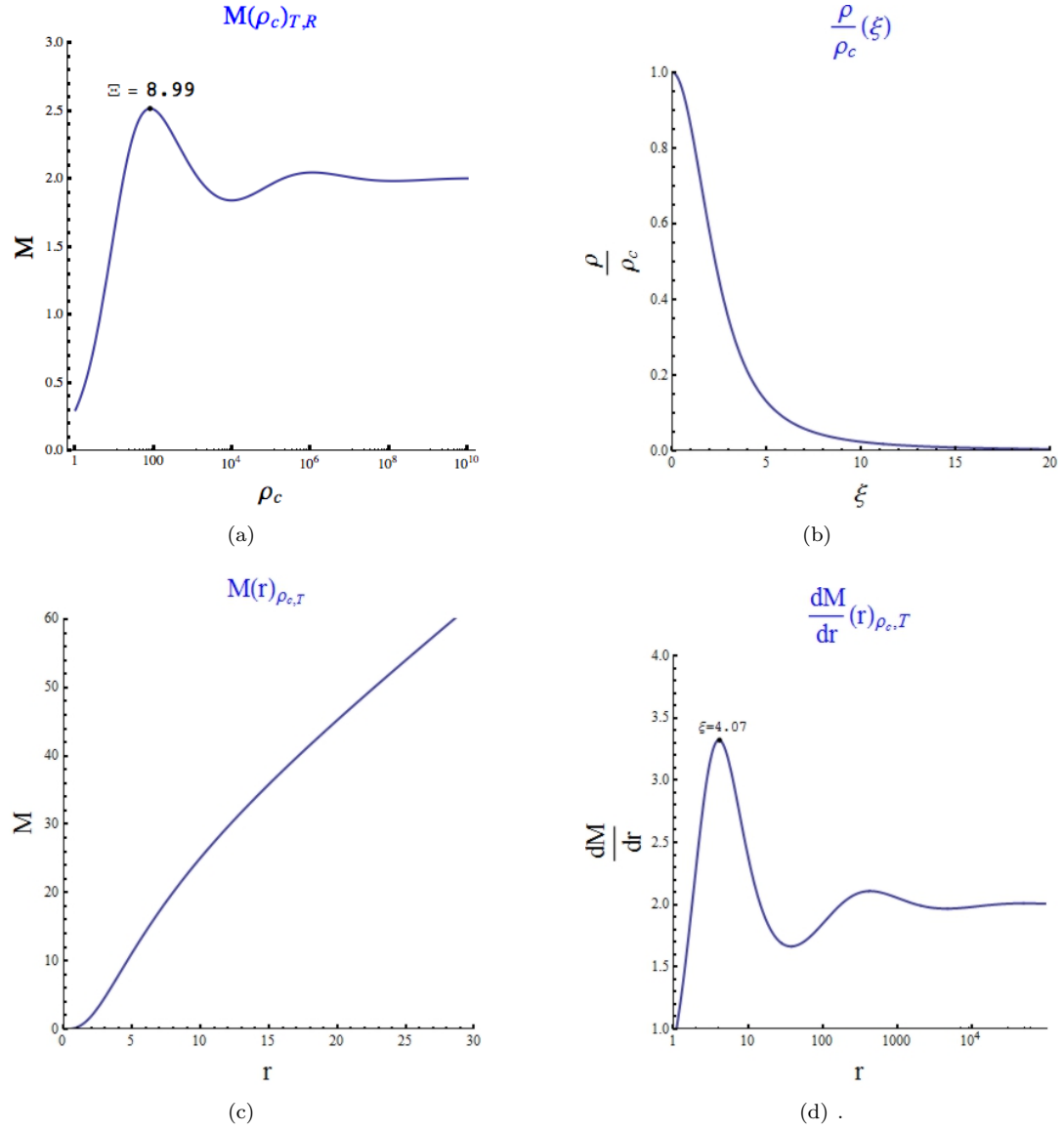


Figura 2.4: (a) Grafico che mostra la massa totale contenuta nella scatola al variare di  $\rho_c$ . Si nota che fissati il raggio della sfera e la temperatura, esiste una massa massima che si può mettere all'interno della sfera per cui esiste equilibrio. Per masse superiori l'equilibrio non esiste. Si nota anche che oltre una certa densità centrale la massa totale diminuisce anche se la densità centrale aumenta.  $M$  in unità di  $4\pi R\tau$ ,  $\rho_c$  in unità di  $\tau/R^2$ . (b) Il profilo di densità all'equilibrio riscalato alla densità centrale, che è funzione della sola variabile  $\xi$ . (c) La massa contenuta fino al raggio  $r$ . L'andamento a grandi  $r$  è circa lineare.  $M$  in unità di  $4\pi(\tau^3/\rho_c)^{1/2}$  e  $r$  in unità di  $(\tau/\rho_c)^{1/2}$ . (d) La derivata della massa contenuta fino al raggio  $r$ . Tende a una costante, il che dimostra che l'andamento a grandi  $r$  della figura 2.4(c) è lineare.  $M$  in unità di  $4\pi(\tau^3/\rho_c)^{1/2}$  e  $r$  in unità di  $(\tau/\rho_c)^{1/2}$ . Si osservi il punto  $\xi = 4.07$  che si ritroverà anche nella figura 3.6(a).

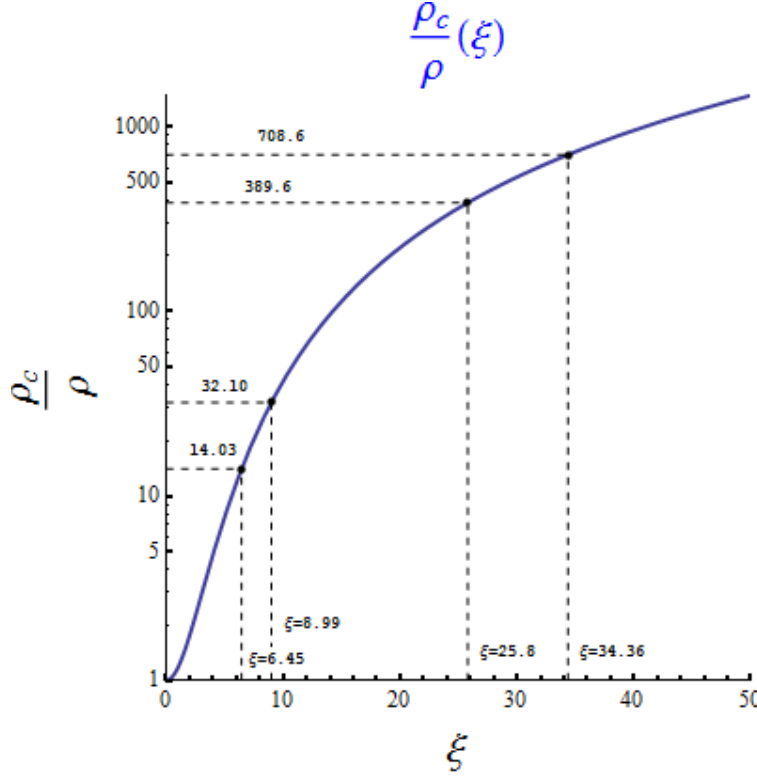


Figura 2.5: Grafico per la conversione dal parametro  $\xi$  al rapporto fra la densità centrale e quella al bordo.

### 2.2.2 Discussione

Nella Sezione 2.2 era stato osservato che le quantità necessarie per specificare un particolare stato di equilibrio sono quattro: due scale dimensionali e due parametri adimensionali, e che ovviamente varie quaterne sono possibili. Dall'analisi dei grafici emerge però che la corrispondenza tra quaterne e stati di equilibrio non è sempre biunivoca. Consideriamo ad esempio la figura 2.2(a) e fissiamo due scale dimensionali,  $m$  e  $T$ , e un parametro adimensionale,  $M/m$ . Fissare queste quantità significa porsi su una particolare isoterma dalla forma simile a quella di figura 2.2(a). Per definire un particolare stato di equilibrio, cioè un punto sulla curva, dobbiamo fissare un ultimo parametro adimensionale. Dalla figura vediamo che se scegliamo come ultimo parametro  $P/[(4\pi)^3 G \tau^4 / R^2]$ , così che in totale abbiamo fissato una quaterna di quantità, si ha che:

1. Esiste un valore massimo del parametro  $P/[(4\pi)^3 G \tau^4 / R^2]$  oltre il quale non esistono stati di equilibrio (questo punto è la sommità della spirulina).
2. Per alcuni valori di  $P/[(4\pi)^3 G \tau^4 / R^2]$  esistono più stati di equilibrio (se  $P/[(4\pi)^3 G \tau^4 / R^2]$  è vicino al valore del punto in cui la figura spiraleggia, ci può essere un numero arbitrariamente alto di stati di equilibrio!).

Così la corrispondenza tra le quaterne  $\{m, T, M/m, P/[(4\pi)^3 G \tau^4 / R^2]\}$  e gli stati di equilibrio non è biunivoca; è vero che ad ogni stato di equilibrio corrisponde una quaterna, ma ad una quaterna possono corrispondere più stati o nessuno stato di equilibrio. Fisicamente ciò corrisponde al fatto che se prendiamo un sistema e fissiamo  $m$ ,  $T$  ed  $M$ , cioè il tipo, la temperatura e la quantità di gas, esiste una pressione massima oltre la quale l'equilibrio non è possibile, ed inoltre per alcuni valori della pressione esistono più stati di equilibrio diversi tra loro. Dalla stessa figura si deduce che sempre fissando  $m$ ,  $T$  ed  $M$  esiste un  $R$  minimo al

Tabella 2.1: Notazione;  $i$  sta per una qualsiasi tra  $A$  o  $B$ .

Simbolo	Descrizione
$G$	Costante di gravitazione universale
$P_i$	Pressione (può indicare sia quella al bordo sia quella locale a seconda del contesto)
$\rho_i$	Densità (massa per unità di volume) della componente $i$
$\rho_{ic}$	Densità centrale della componente $i$
$m_i$	Massa di singola particella
$M$	Con pedice $A$ o $B$ indica la massa totale di quella componente di gas; senza pedice indica la somma delle due
$N_i$	Numero di particelle totali della componente $i$
$T$	Temperatura
$\tau_i$	$kT/4\pi Gm_i$ ; ha dimensioni Massa/Lunghezza
$\mathcal{T}$	Con pedice $A$ o $B$ indica l'energia cinetica totale di quella componente; senza pedice ne indica la somma
$E$	Energia totale, cinetica + gravitazionale
$\Omega$	Energia gravitazionale totale
$R$	Raggio della sfera
$V$	$4\pi R^3/3$ , volume della sfera
$\Phi$	Potenziale gravitazionale, preso nullo all'infinito
$\xi$	$[(\rho_{Ac} + \rho_{Bc})/(\tau_A + \tau_B)]^{1/2}r$ ; variabile raggio in unità adimensionali
$\Xi$	$[(\rho_{Ac} + \rho_{Bc})/(\tau_A + \tau_B)]^{1/2}R$ ; raggio della sfera in unità adimensionali
$\alpha$	$\rho_{Bc}/\rho_{Ac}$ ; è il rapporto fra le densità centrali
$\beta$	$m_B/m_A = \tau_A/\tau_B$ ; è il rapporto fra le masse di singola particella

di sotto del quale non esistono stati di equilibrio, e per alcuni valori di  $R$  esistono più stati di equilibrio.

Ci possiamo chiedere a questo punto: esiste una scelta per l'ultimo parametro adimensionale per cui la corrispondenza tra quaterne e stati di equilibrio è biunivoca? Sì, ad esempio tra stati di equilibrio e la quaterna  $\{m, T, M/m, \Xi\}$  e gli stati di equilibrio esiste una corrispondenza biunivoca. Fissare le prime tre quantità significa mettersi su una particolare curva; la scelta dell'ultimo parametro  $\Xi$  identifica univocamente il punto della spirale su cui ci troviamo:  $\Xi$  molto piccoli significa stare molto a destra nella spirale, per  $\Xi = 6.45$  si raggiunge la sommità della spirale (questo valore è indipendente dal valore delle altre quantità; come si vedrà, in generale tutti i punti in qualche modo critici avranno un valore della variabile adimensionale  $\Xi$  fissato), per  $\Xi = 8.99$  si raggiunge l'estremità sinistra della spirale e per  $\Xi \rightarrow \infty$  si spiraleggia verso il centro.

Un'analisi analoga vale per altre scelte dei parametri. Ad esempio fissare la terna  $\{m, R, M/m\}$  significa vincolarsi su una figura spirale come quella rappresentata in figura 2.2(c); se scegliamo come ultimo parametro l'energia in forma adimensionale,  $E/(GM^2/R)$ , per un certo valore di ques'ultimo possono esistere nessuno o più stati di equilibrio; se invece scegliamo come ultimo parametro  $\Xi$  c'è corrispondenza biunivoca tra le quaterne di parametri e gli stati di equilibrio. Dallo stesso grafico si può ottenere anche un'altra importante deduzione: fissati  $\{m, E, M/m\}$  (il caso che più si avvicina a un ammasso globulare) esistono stati di equilibrio solo per valori di  $R$  minori di un certo raggio critico, corrispondente al punto più basso della spirale; per alcuni valori di  $R$  possono esistere più stati di equilibrio! Questi diversi stati di equilibrio sono caratterizzati da diversi valori della variabile  $\Xi$  o, il che è lo stesso visto che

c'è una corrispondenza biunivoca tra le due<sup>11</sup>, dal rapporto fra la densità centrale e la densità al bordo. Per convertire il parametro  $\Xi$  nel rapporto fra le densità si veda la figura 2.5.

Abbiamo così trovato alcune quaterne che hanno una corrispondenza biunivoca con gli stati di equilibrio.

A questo punto viene naturale chiedersi se gli stati di equilibrio così trovati sono stabili oppure no rispetto a piccole perturbazioni, sia dal punto di vista termodinamico che dinamico, e quali sono i valori delle quaterne che caratterizzano gli stati di equilibrio stabili e instabili. La risposta, come vedremo, è che il valore del parametro  $\Xi$  (o in alternativa il rapporto tra la densità al bordo e la densità centrale) sarà sufficiente a determinare univocamente la stabilità termodinamica o dinamica, indipendentemente dal valore delle altre quantità. Si troveranno diversi valori critici di  $\Xi$  che corrispondono all'instaurarsi di instabilità per differenti condizioni al contorno.

Come ultima osservazione, notiamo che chiedersi se la ad esempio la quaterna  $\{m, E, M/m, R\}$  corrisponde ad uno stato di equilibrio stabile oppure no può essere ambiguo, in quanto essa può non identificare univocamente uno stato di equilibrio.

---

<sup>11</sup>Il rapporto tra la densità al centrale e la densità al bordo è  $e^{\psi(\Xi)}$ , e poiché  $\psi(\xi)$  è una funzione monotona crescente la corrispondenza tra il rapporto di densità e  $\Xi$  è biunivoca.





# Analisi della Stabilità

## 3.1 Introduzione

Cominciamo in questa Sezione a discutere della stabilità degli stati di equilibrio calcolati nel capitolo precedente. Analizzeremo in dettaglio il caso ad una componente, per poi analizzare brevemente il caso a due componenti dell'ultima sezione del capitolo. Nel capitolo 2 abbiamo calcolato gli stati di equilibrio, definiti come i punti stazionari dell'entropia di Boltzmann nell'approccio cinetico e come gli equilibri idrostatici nell'approccio fluido. Osserviamo inoltre che gli stati di equilibrio sono anche soluzioni stazionarie dell'equazione di Boltzmann non collisionale (conosciuta anche come equazione di Vlasov):

$$\frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{r}} - \frac{\partial \Phi(\mathbf{r}, t)}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial f(\mathbf{r}, \mathbf{v}, t)}{\partial \mathbf{v}} = 0 \quad (3.1)$$

dove  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale generato dalla distribuzione  $f$  stessa. Le configurazioni calcolate corrispondono dunque ad essere stati di equilibrio secondo diversi criteri: innanzitutto secondo un criterio termodinamico, che dice che gli stati di equilibrio (stabili o instabili) sono punti stazionari dei potenziali termodinamici. In secondo luogo, sono configurazioni di equilibrio dinamico rispetto ad almeno due scelte delle equazioni che governano la dinamica del sistema: le equazioni della fluidodinamica e l'equazione di Boltzmann non collisionale.

Immaginiamo di perturbare leggermente il profilo di densità rispetto alla configurazione di equilibrio e di lasciar evolvere il sistema: se l'equilibrio è instabile, il sistema si allontanerà ulteriormente dallo stato di equilibrio, se invece il sistema è stabile effettuerà delle piccole oscillazioni attorno ad esso. Ci chiediamo quali siano gli stati di equilibrio stabile o instabile al variare delle equazioni che governano l'evoluzione del sistema. Se il sistema è governato dalla equazione di Boltzmann non collisionale (3.1), si può mostrare che, nel caso di sfera isoterma infinita senza bordo, il sistema è sempre linearmente stabile, dove linearmente significa linearizzando le equazioni attorno allo stato di equilibrio (si veda ad esempio [3], capitolo 5). Se si sta investigando la stabilità termodinamica del sistema, la condizione di stabilità è che lo stato considerato sia un massimo (o minimo) locale del potenziale termodinamico corrispondente alle condizioni al bordo che stiamo studiando, e non semplicemente un punto stazionario. Un secondo modo di investigare la stabilità termodinamica (si vedano [39] e [31]) consiste nell'introdurre un'equazione di diffusione del calore:

$$\mathbf{F} = -\lambda \nabla T, \quad (3.2)$$

dove  $\mathbf{F}$  è il flusso di energia per unità di tempo e area e  $\lambda$  la conducibilità termica, e perturbare leggermente la temperatura rispetto a quella uniforme di equilibrio in modo che ci siano disomogeneità. Se i flussi di calore tendono a riportare la situazione verso l'equilibrio, esso è stabile (si noti che in questi approcci si assume che l'equilibrio idrostatico sia sempre soddisfatto: quest'ipotesi è giustificata dal fatto che si assume valida la relazione (1.1)).

Per studiare la stabilità con l'approccio fluido in regime lineare, si assume un'equazione di stato e si utilizzano le equazioni di Eulero (o Navier-Stokes) (vedi [22]) perturbando la densità rispetto al profilo di densità di equilibrio.

Nelle prossime sezioni, studieremo la stabilità del sistema dal punto di vista termodinamico e dal punto di vista dinamico con l'approccio fluido, e troveremo che le condizioni per la stabilità sono esattamente le stesse.

Rispetto all'approccio termodinamico di Lynden-Bell e Wood che fa uso delle serie lineari di Poincaré, l'approccio idrodinamico presenta il notevole vantaggio che è possibile studiare non solo le situazioni di stabilità marginale per capire sotto quali condizioni si innesca l'instabilità, ma anche le situazioni di instabilità non marginale e l'evoluzione successiva del sistema (in questa Tesi, solo in regime lineare).

Prima di andare procedere, rivediamo qui brevemente l'argomento originale di Bonnor [4] per l'instabilità a pressione e temperatura costanti e l'interpretazione data da Lynden-Bell e Wood [24] dell'instabilità termodinamica in termini di calori specifici negativi.

Bonnor costruì l'isoterma rappresentata in figura 2.2(a) e notò che  $\partial P/\partial V_{T,M}$  diventa positivo se il parametro adimensionale  $\Xi$  che caratterizza il sistema diventa più grande di un valore critico pari a  $\Xi = 6.45$ : questo significa che se il sistema parte da una configurazione con  $\Xi = 6.45$  e viene compresso un pochino (mantenendo la temperatura costante) la pressione che esso esercita al bordo diventa più piccola (per un gas perfetto non autogravitante sarebbe vero il contrario). Pertanto, se la pressione esercitata dall'esterno è mantenuta costante e pari al valore iniziale il sistema si comprime ulteriormente, e così via, e il sistema collassa. Con ragionamenti analoghi si può mostrare che il sistema è instabile anche per tutti i valori di  $\Xi > 6.45$ , compresi quelli il sistema giace su una parte della spirale con  $\partial P/\partial V_{T,M} < 0$  (basta considerare un sotto sistema più piccolo di quello iniziale tale  $\partial P/\partial V_{T,M} > 0$ ). Notiamo che questa argomentazione funziona solo se il sistema è mantenuto a temperatura costante. Se la compressione è ad esempio adiabatica, il sistema quando viene compresso aumenta la sua temperatura, a causa del lavoro subito, e di conseguenza la pressione dopo la compressione è più alta che per il caso isoterma, e l'instabilità non si instaura più a  $\Xi = 6.45$ . In effetti, nel caso di compressione adiabatica vediamo che il sistema segue gli stati rappresentati in figura 2.2(b): in questo caso  $\partial P/\partial V_{T,M}$  diventa positivo, indicando instabilità, per  $\Xi > 25.8$ . Se il sistema parte da una configurazione con  $\Xi = 25.8$  e lo si fa *espandere*<sup>1</sup> adiabaticamente, la pressione esercitata dal gas aumenta (per un gas perfetto non autogravitante sarebbe vero il contrario), quindi se la pressione esterna è mantenuta costante il sistema si espande ulteriormente ed è così instabile. Da notare che l'analisi di Bonnor è stata generalizzata a casi di simmetria non sferica, che hanno trovato applicazioni anche in altri contesti, in particolare nello studio di nubi nel mezzo interstellare [27].

Per quanto riguarda l'interpretazione di Lynden-Bell e Wood, dalla figura 2.2(c) vediamo che il calore specifico del sistema inizia a essere negativo per  $\Xi > 8.99$ . Cosa succede mettendo a contatto un sistema con calore specifico negativo con un bagno termico? Supponendo che il calore fluisca sempre dal corpo con temperatura più alta a quello con temperatura più bassa:

- Se il sistema ha temperatura più bassa, il calore fluisce dal bagno termico al sistema e la temperatura del sistema diminuisce in virtù del calore specifico negativo.
- Se il sistema ha temperatura più alta, il calore fluisce dal sistema al bagno termico e la temperatura del sistema aumenta in virtù del calore specifico negativo.

Così, se mettiamo la sfera isoterma con  $\Xi > 8.99$  a contatto con un bagno termico ad una temperatura più bassa, essa si scalda ulteriormente spostandosi a  $\Xi$  ancora maggiori, e così via, e il sistema è instabile. Questa instabilità è quella con temperatura costante, perché il sistema viene mantenuto a contatto con un bagno esterno a temperatura fissata. Il punto  $\Xi = 8.99$  viene in effetti trovato come punto di instabilità a  $T$  e  $V$  costanti sia nell'analisi termodinamica, sia in quella dinamica.

<sup>1</sup>L'innesco dell'instabilità avviene quando il sistema si espande, contrariamente all'instabilità di Bonnor appena discussa per  $P$  e  $T$  costanti che si innesca a  $\Xi = 6.45$  per cui l'innesco dell'instabilità avviene se si *contrae* il sistema.

Se ora si considera un sistema ad energia costante, la situazione cambia e il sistema non è più instabile per  $\Xi > 8.99$ , ma è ancora stabile fino a  $\Xi = 34.363$ . In assenza di un vero bagno termico Lynden-Bell e Wood immaginarono che la parte esterna del sistema, avendo calore specifico positivo, prendesse il ruolo di bagno termico. La parte interna, essendo sostanzialmente autogravitante, ha invece calore specifico negativo. Immaginiamo di partire da una situazione in cui la temperatura iniziale è uniforme e la parte esterna ha calore specifico positivo e il nucleo calore specifico negativo. Una piccola fluttuazione nella temperatura potrebbe portare la parte esterna ad avere temperatura leggermente minore della parte interna: si instaurerebbe così un flusso di calore dall'interno all'esterno, che aumenterebbe sia la temperatura della parte interna che di quella esterna. Se la temperatura della parte interna aumenta più velocemente di quella della parte esterna, si ha un'instabilità, e questo succede proprio per  $\Xi > 34.363$ .

## 3.2 Analisi della Stabilità Termodinamica

Per studiare la stabilità termodinamica si usano i potenziali termodinamici. Nei punti di equilibrio stabile i potenziali termodinamici sono massimizzati o minimizzati al variare della funzione di distribuzione  $f$  sotto certi vincoli, diversi per ogni potenziale. In dettaglio, la termodinamica fornisce le seguenti affermazioni di carattere generale<sup>2</sup> (si veda ad esempio [24], pag. 512):

1. perché un sistema sia all'equilibrio con  $E$  e  $V$  fissati, l'entropia  $S_b$ , considerata come funzionale della funzione di distribuzione  $f$ , deve essere un punto stazionario al variare di tutte le funzioni di distribuzione. L'equilibrio è stabile se il punto stazionario è un massimo locale.

*Variante:* se  $S$  è un massimo locale al variare di  $f$  per  $E$  e  $V$  fissati, allora  $E$  è un minimo locale al variare di  $f$  per  $S$  e  $V$  fissati e viceversa. Dunque i punti di instabilità ad  $E$ ,  $V$  o ad  $S$ ,  $V$  fissati coincidono.

2. perché un sistema sia all'equilibrio con  $T$  e  $V$  fissati, l'energia libera di Helmholtz  $\mathcal{F}$  deve essere un punto stazionario al variare di  $f$ . L'equilibrio è stabile se il punto stazionario è un minimo locale.
3. perché un sistema sia all'equilibrio con  $S_b$  e  $P$  fissati, l'entalpia  $\mathcal{H}$  deve essere un punto stazionario al variare di  $f$ . L'equilibrio è stabile se il punto stazionario è un minimo locale.

*Variante:* se  $\mathcal{H}$  è un minimo locale al variare di  $f$  per  $S_b$  e  $P$  fissati, allora  $S_b$  è un massimo locale al variare di  $f$  per  $\mathcal{H}$  e  $P$  fissati e viceversa. Dunque i punti di instabilità ad  $S_b$ ,  $P$  o ad  $\mathcal{H}$ ,  $P$  fissati coincidono.

4. perché un sistema sia all'equilibrio con  $T$  e  $P$  fissati, l'energia libera di Gibbs  $\mathcal{G}$  deve essere un punto stazionario al variare di  $f$ . L'equilibrio è stabile se il punto stazionario è un minimo locale.

Per discriminare tra punti di equilibrio stabili o instabili (dal punto di vista termodinamico) si considera il funzionale della funzione di distribuzione relativo alle condizioni al contorno scelte (ad esempio nel caso di  $E$  e  $V$  costante si prende  $S_b[f]$ ), si calcola il valore del funzionale per la distribuzione di equilibrio definita dalle (2.19), e infine si vede se per piccole variazioni della  $f$  la configurazione è effettivamente un massimo/minimo o solo un generico punto stazionario. Se è un massimo/minimo allora l'equilibrio è stabile. Per discriminare tra massimi, minimi e punti stazionari si può in linea di principio calcolare esplicitamente la derivata funzionale seconda del funzionale scelto. Se essa è definita positiva o negativa si tratta rispettivamente

<sup>2</sup>In tutte le proposizioni che seguono è sottinteso che  $M$  sia fissata, e nel caso a due componenti anche  $M_B/M_A$  e  $\beta = m_B/m_A$ .

di un minimo o di un massimo, se ha autovalori di entrambi i segni è un punto stazionario. Un'alternativa al calcolo esplicito della derivata funzionale seconda è dato dal metodo delle serie lineari di Poincaré, che analizzeremo nella Sezione 3.2.2.

### 3.2.1 Analisi Termodinamica basata sulla variazione esplicita dei funzionali

Questo metodo, utilizzato originariamente da Antonov in [1] per il caso con  $E, V$  costanti, rivisitato per semplificarne la matematica da Padmanabhan in [32] ed esteso al caso con  $V, T$  costanti da Chavanis in [7], consiste nel calcolare esplicitamente la derivata seconda dei funzionali e cercare per quali situazioni di equilibrio essa è definita negativa/positiva o non definita.

Per semplicità e rendere il calcolo affrontabile si considera solamente il sottoinsieme delle funzioni di distribuzione che hanno nelle velocità una distribuzione maxwelliana a temperatura  $T$  uniforme e distribuzioni  $\rho$  arbitrarie (che rispettino però i vincoli del caso), cioè le distribuzioni (2.19) con profili di densità generici e non di equilibrio. Come abbiamo osservato, queste funzioni massimizzano l'entropia fissati i profili di densità. Applicheremo questo metodo al caso di due componenti per dimostrare l'equivalenza dell'instabilità dinamica e termodinamica; per il caso ad una componente (che comunque è un caso particolare) si rimanda alla letteratura citata.

Notare che questo metodo, contrariamente a quello delle serie lineari, fornisce anche i profili di densità che innescano l'instabilità.

### 3.2.2 Analisi Termodinamica basata sulle serie lineari di Poincaré

Questo metodo è stato applicato per la prima volta al problema della sfera isoterma da Lynden-Bell e Wood [24] e rivisitato da Katz, [17] e [18], il quale ha notato che le serie lineari di Poincaré possono essere usate non solo per determinare il punto in cui si instaurano le instabilità, ma anche per trovare il numero di modi instabili di ciascuna configurazione<sup>3</sup>. Illustriamo ora il principio generale del metodo nella riformulazione di Katz.

Sia data una funzione di due variabili reali  $F(x, s)$ . Supponiamo che, per ogni fissato  $s$ , uno stato di equilibrio sia definito come un punto stazionario di  $F(x, s)$  al variare di  $x$ , che l'equilibrio sia stabile se questo punto è un massimo e che sia instabile se è un minimo oppure nè un massimo nè un minimo. Nel caso della sfera isoterma il ruolo di  $F$  è giocato dai potenziali termodinamici, il ruolo di  $s$  dalle due quantità che si tengono fisse, mentre il ruolo di  $x$  dalla funzione di distribuzione  $f$ . Vediamo quindi che l'unica variabile  $x$  che per semplicità useremo nella spiegazione del metodo sarà sostituita da un infinito continuo di variabili, rappresentato dalla funzione  $f$  negli infiniti punti in cui è definita, mentre il parametro  $s$  da una coppia di parametri esterni. Ad esempio per l'instabilità a  $E$  e  $V$  costante si fanno le seguenti identificazioni:

$$\begin{array}{lll} F & \rightarrow & S \\ x & \rightarrow & f \\ s & \rightarrow & \{E, V\} \end{array}$$

Procediamo quindi con la spiegazione del metodo. Supponiamo che per un certo valore di  $s$  esistano un numero  $n$  di punti  $x_a$  di equilibrio (stabile o instabile), indicizzati dalla variabile discreta  $a$ . Variando di poco  $s$ , sotto opportune condizioni di regolarità anche gli  $x$  che realizzano gli equilibri variano di poco. Dunque al variare di  $s$  ciascuno degli iniziali massimi tratterà una linea nello spazio  $F, x, s$  (vedi figura 3.1). Possiamo parametrizzare queste linee con il parametro  $s$  stesso. Chiamiamo gli  $n$  valori di  $x$  che realizzano gli equilibri  $x_a(s)$ ; le serie di equilibri che danno il nome al metodo che stiamo studiando sono definite come le

<sup>3</sup>il numero di modi instabili è qui definito come il numero di autovalori negativi della derivata funzionale seconda dei potenziali termodinamici

linee

$$F_a(s) \equiv F(x_a(s), s). \quad (3.3)$$

I punti di equilibrio soddisfano la relazione<sup>4</sup>

$$\partial_x F(x, s)[x_a(s), s] = 0. \quad (3.4)$$

Un punto di equilibrio è stabile se

$$\partial_x^2 F(x, s)[x_a(s), s] < 0. \quad (3.5)$$

Calcoliamo la derivata prima e seconda delle funzioni  $F_a(s)$ :

$$\frac{dF_a(s)}{ds} = \partial_x F(x, s)[x_a(s), s] \partial_s x_a(s) + \partial_s F(x, s)[x_a(s), s] \quad (3.6)$$

$$\stackrel{(3.4)}{=} \partial_s F(x, s)[x_a(s), s] \quad (3.7)$$

$$\frac{d^2 F_a(s)}{ds^2} \stackrel{(3.7)}{=} \frac{d}{ds} (\partial_s F(x, s)[x_a(s), s]) \quad (3.8)$$

$$= \partial_{xs} F(x, s)[x_a(s), s] \partial_s x_a(s) + \partial_{ss} F(x, s)[x_a(s), s] \quad (3.9)$$

Ora facciamo la derivata totale rispetto a  $s$  dell'equazione (3.4):

$$0 = \frac{d}{ds} (\partial_x F(x, s)[x_a(s), s]) \quad (3.10)$$

$$= \partial_{xx} F(x, s)[x_a(s), s] \partial_s x_a(s) + \partial_{sx} F(x, s)[x_a(s), s] \quad (3.11)$$

Ricavando  $\partial_s x_a(s)$  dalla (3.11) e sostituendolo nella (3.9) e supponendo che le derivate di  $F$  rispetto a  $x$  ed  $s$  commutino otteniamo:

$$\boxed{\frac{d^2 F_a(s)}{ds^2} = - \frac{(\partial_{xs} F(x, s)[x_a(s), s])^2}{\partial_{xx} F(x, s)[x_a(s), s]} + \partial_{ss} F(x, s)[x_a(s), s]} \quad (3.12)$$

Se le funzioni considerate sono abbastanza regolari, il passaggio da un equilibrio stabile ad uno instabile al variare di  $s$  è evidenziato da un cambio di segno di  $\partial_{xx} F(x, s)[x_a(s), s]$ , che deve dunque diventare da negativo a positivo passando per zero. Se questo avviene e contemporaneamente è soddisfatta la condizione  $\partial_{xs} F(x, s)[x_a(s), s] \neq 0$  abbiamo che

$$\frac{d^2 F_a(s)}{ds^2} = \infty \quad (3.13)$$

quando si passa da un'equilibrio stabile ad uno instabile. Questa è l'osservazione chiave. Dunque se si trova che la funzione (3.12) vale infinito in qualche punto è un segnale della possibile comparsa di un'instabilità. La potenza del metodo consiste nel fatto che per osservare questo segnale è sufficiente la conoscenza dei valori di  $F$  lungo la serie degli equilibri: nel caso della sfera isoterma ciò corrisponde ad analizzare i potenziali termodinamici di equilibrio al variare dei parametri esterni, senza preoccuparsi di quanto valgano fuori dagli stati di equilibrio.

Si dimostra in letteratura (vedi [18] e referenze indicate), e si può intuire il motivo dalle illustrazioni 3.1, che sotto opportune condizioni di regolarità il passaggio da una configurazione stabile può avvenire solo quando più linee di equilibri si incontrano. In particolare esistono due sottocasi:

1. Più serie di equilibri si avvicinano e si fondono per un certo valore di  $s$ , diventando un'unica serie (vedi figura 3.1(b)).

<sup>4</sup>Usiamo una notazione antiestetica ma completa per chiarezza. Il significato è il seguente:  $\partial_x F(x, s)[a, b]$  significa la derivata rispetto a  $x$  di  $F$  considerata come funzione di  $x, s$  calcolata nel punto  $a, b$ .

2. Più serie di equilibri si fondono e spariscono oltre un certo valore di  $s$ ; le due serie possono così essere considerate come un'unica serie che “torna indietro” (vedi figura 3.1(a)).

Facciamo ora qualche osservazione. perché un equilibrio stabile non può diventare un equilibrio instabile senza dover necessariamente incontrare un'altra serie di equilibri? Detto in altre parole, perché non può succedere che un massimo diventi un minimo al variare di  $s$  senza che incontri un'altra linea di equilibrio? Potremmo immaginare ad esempio che il profilo per  $s$  fissato sia una parabola, la quale cambia la sua concavità all'aumentare di  $s$  passando da positiva a negativa, ad esempio:  $F(x, s) = (s - 1)x^2$ . Per  $s < 1$  esiste un solo equilibrio stabile, per  $s > 1$  un solo equilibrio instabile; dunque in questo caso sembra che siamo passati da equilibrio stabile a instabile senza che ci sia stato un incontro con altre serie di equilibrio. Osserviamo però che per  $s = 0$  qualsiasi valore di  $x$  era un punto stazionario e dunque un equilibrio del sistema! Questa può essere vista come una seconda serie di equilibri che incontra la seconda perpendicolarmente, così che il teorema è preservato.

Nel caso di un numero finito di variabili  $x_i$  al posto della singola  $x$  (ricordiamo che nel caso della sfera isoterma le variabili saranno un'infinito continuo) i risultati precedenti si generalizzano facilmente, assumendo che fissato il parametro esterno  $s$  la matrice delle derivate seconde  $\partial_{x_i x_j} F(\{x_i\}, s)$  sia diagonalizzabile e non degenera (cioè con tutti gli autovalori diversi); si veda [17]. Il risultato rimane lo stesso: se la funzione (3.12) in qualche punto assume valore infinito, è indice di instabilità.

Un'osservazione importante è che grazie all'equazione (3.12) possiamo dedurre non solo il possibile insorgere di instabilità, ma anche *come* cambia la stabilità nella vicinanza dei punti in cui vale (3.13) a seconda della forma delle serie di equilibrio proiettate nel piano  $F - s$ : ad esempio se si passa da equilibrio stabile ad uno instabile lungo una linea di equilibri la quantità (3.12) si avvicina a  $+\infty$  quando  $s$  si avvicina al valore critico, per poi ripartire da  $-\infty$  una volta superatolo (queste affermazioni si deducono analizzando il segno di  $\partial_{xx} F$  nella relazione (3.12)). Se al contrario l'equilibrio rimane stabile, dopo il valore critico l'espressione (3.12) riparte dal valore  $+\infty$ .

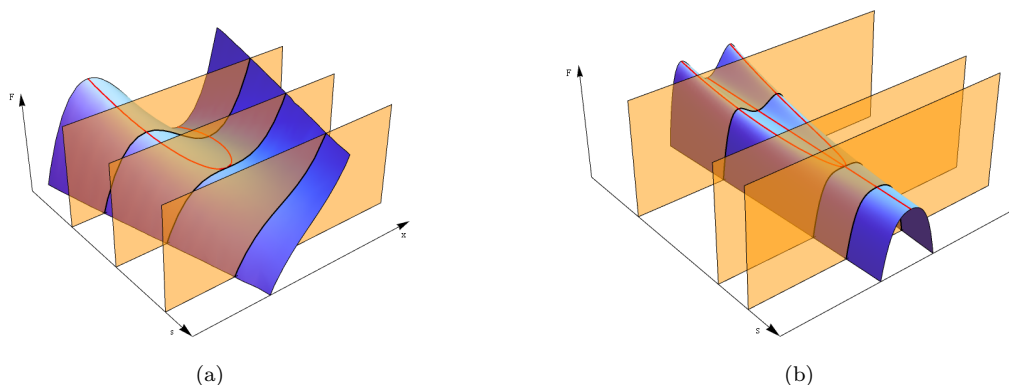


Figura 3.1: Figure schematiche a scopo illustrativo. Le linee rosse sono le serie di punti di equilibrio, definite dalle formule (3.3). Le linee nere indicano sezioni con  $s$  costante. (a) Esempio di situazione in cui una serie di equilibrio “torna indietro”. Questo è l’analogo del caso della sfera isoterma. La serie di equilibrio raggiunge un valore massimo del parametro esterno, poi torna indietro e l’equilibrio passa da stabile a instabile. (b) Esempio di situazione in cui più serie di equilibrio si fondono. Una serie di equilibrio può passare da stabile a instabile o può anche rimanere stabile.

Vediamo ora come si applica il metodo alle sfere isoterme a una e due componenti. Per completezza riportiamo tutti i casi. La situazione è riassunta nella tabella 3.1.

1.  $F = S_b$ . In questo caso possiamo scegliere indistintamente come parametro esterno  $E$  o  $V$ ; scegliamo  $E$ . Allora la quantità (3.6) corrisponde in questo caso alla variazione dell'entropia *di equilibrio* variando il parametro esterno  $E$ , che la termodinamica afferma essere l'inverso della temperatura<sup>5</sup>:

$$\frac{\partial S_b}{\partial E}|_{M,V} = \frac{1}{T}. \quad (3.14)$$

Il metodo delle serie lineari ci dice che i punti a cui si instaura le instabilità sono i punti in cui  $1/T(E)_{M,V}$  ha una tangente verticale.  $d(1/T(E))/dE$  corrisponde alla quantità (3.12). Per la sfera isoterma ad una componente  $1/T(E)_{M,V}$  è la figura 2.2(c) girata di  $\pi/2$ . Si vede che in corrispondenza di  $\xi = 34.36$  la derivata della quantità  $1/T(E)$  passa da essere  $+\infty$  a  $-\infty$ , e questo è il caso in cui si passa da una configurazione stabile ad una instabile. Ad ogni mezzo giro della spirulina la situazione si ripete, indicando che si instaurano nuovi modi instabili.

Usando la variante in cui  $E$  è minima per  $S$  e  $V$  fissati, identificando  $F = E$  e scegliendo come parametro  $V$ , la quantità (3.6) si identifica con:

$$\frac{\partial E}{\partial V}|_{M,S} = P. \quad (3.15)$$

Dunque l'instabilità si instaura dove il grafico  $P(V)_{M,S}$ , cioè l'adiabatica, ha tangente verticale. In conclusione:

l'instabilità ad  $E$  e  $V$  costanti si instaura dove il grafico  $E(T)_{M,V}$  ha tangente orizzontale e dove il grafico  $P(V)_{M,S}$  (adiabatica) ha tangente verticale. In questo stesso punto si instaura l'instabilità a  $S$  e  $V$  costanti.

2.  $F = \mathcal{F}$ , l'energia libera di Helmholtz. Vale che  $d\mathcal{F} = -S_b dT - PdV$ . I parametri esterni sono  $T$  e  $V$ ; se scegliamo  $V$ :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial V}|_{M,T} = -P \quad (3.16)$$

l'instabilità a  $T$  e  $V$  costanti si instaura dove il grafico  $P(V)_{M,T}$  (isoterma) ha tangente verticale.

3.  $F = \mathcal{G}$ , l'energia libera di Gibbs. Vale che  $d\mathcal{G} = -S_b dT + VdP$ . I parametri esterni sono  $T$  e  $P$ ; se scegliamo  $P$ :

$$\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial P}|_{M,T} = V \quad (3.17)$$

l'instabilità a  $P$  e  $T$  costanti si instaura dove il grafico  $P(V)_{M,T}$  (isoterma) ha tangente orizzontale.

4.  $F = \mathcal{H}$ , l'entalpia. I parametri sono  $S_b$  o  $P$ ; scegliamo  $P$ . Da  $d\mathcal{H} = TdS_b + VdP$  si ha:

$$\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial P}|_{M,S} = V \quad (3.18)$$

Usando la variante in cui  $S_b$  è massima per  $\mathcal{H}$  e  $P$  fissati, identificando  $F = S_b$  e scegliendo come parametro  $H$  otteniamo

$$\frac{\partial S_b}{\partial \mathcal{H}}|_{M,P} = \frac{1}{T} \quad (3.19)$$

---

<sup>5</sup> $TdS = dE + PdV$ .

l'instabilità ad  $S$  e  $P$  costanti (queste condizioni corrispondono ad esempio a una compressione adiabatica reversibile del sistema senza scambi di calore) si instaura dove il grafico  $P(V)_{M,S}$  (adiabatica) ha tangente orizzontale e dove il grafico  $\mathcal{H}(T)_{M,P}$  ha tangente orizzontale. In questo stesso punto si instaura l'instabilità a  $H$  e  $P$  costanti.

Tabella 3.1: Tabella riassuntiva sulle instabilità termodinamiche. Ogni potenziale termodinamico permette di individuare i punti critici, che corrispondono all'instaurarsi dell'instabilità per condizioni esterne fissate (Parametri Esterni). Sono riportati i valori critici del parametro adimensionale  $\Xi$  che caratterizza il sistema per il caso ad una componente, e le figure rilevanti. Per vedere come variano i punti critici nel caso a due componenti si veda la figura 3.25.

Potenziale Termodinamico	Parametri Esterni	Punti Critici	Valore critico di $\Xi$ (una Componente)	Figure Rilevanti (una Componente)
$S_b$	$E, V$	Tangente orizzontale nel grafico $E(T)_{M,V}$ , tangente verticale nel grafico $P(V)_{M,S}$ , massimo di $-S_b(\xi)_{M,R}$ .	$\Xi = 34.36$	2.2(c), 2.2(b), 2.3(a).
$\mathcal{F}$	$T, V$	Tangente verticale nel grafico $E(T)_{M,V}$ , tangente verticale nel grafico $P(V)_{M,T}$ , massimo di $\mathcal{F}(\xi)_{T,M}$ .	$\Xi = 8.99$	2.2(c), 2.2(a), 2.3(b).
$\mathcal{G}$	$T, P$	Tangente orizzontale nel grafico $P(V)_{M,T}$ , tangente verticale nel grafico $\mathcal{H}(T)_{P,M}$ , massimo di $\mathcal{G}(\xi)_{T,M}$ .	$\Xi = 6.45$	2.2(a), 2.2(d), 2.3(c).
$\mathcal{H}$	$S, P$	Tangente orizzontale nel grafico $\mathcal{H}(T)_{P,M}$ , tangente orizzontale nel grafico $P(V)_{M,S}$ , massimo di $-\mathcal{H}(\xi)_{M,R}$ .	$\Xi = 25.8$	2.2(b), 2.2(d), 2.3(d).

Si noti che il punto a cui si instaura l'instabilità a  $T$  e  $V$  costanti, come anticipato nell'introduzione, è lo stesso punto a cui si instaura il calore specifico negativo come si vede dalla figura 2.2(c). L'interpretazione dell'instabilità in termini di calori specifici negativi è stata data nell'introduzione. L'instabilità a  $P$  e  $T$  costanti è quella scoperta originariamente da Bonnor [4] e Ebert [12]. L'instabilità a  $E$  e  $V$  costanti è quella che Lynden-Bell e Wood hanno denominato "catastrofe gravotermica". L'instabilità a  $V$  e  $T$  costanti va a volte sotto il nome di "collasso isoterma" [7]. Il metodo è applicabile sia al caso ad una che a due componenti. Nel caso a due componenti è stato applicato per ottenere la figura 3.25.



### 3.3 Analisi della Stabilità Dinamica

#### 3.3.1 Introduzione

In questa Sezione analizziamo la stabilità del sistema per piccole perturbazioni rispetto alla situazione di equilibrio idrostatico, utilizzando come equazioni che governano la dinamica del sistema le equazioni della fluidodinamica insieme all'equazione di stato dei gas ideali. Troveremo che l'instabilità dinamica si manifesta esattamente negli stessi punti dell'instabilità termodinamica. Questa analisi può essere considerata anche come una generalizzazione dell'instabilità di Jeans per densità non uniformi: in effetti, se nell'analisi di Jeans si assume l'equazione di stato dei gas ideali, le masse critiche dei punti instabili sono, a meno di fattori numerici, le stesse di quella trovata da Jeans (si veda anche [4]).

Svilupperemo le equazioni nelle due forme cosiddette Lagrangiana e Euleriana. Nella forma Euleriana ogni quantità fisica è considerata come funzione delle variabili indipendenti  $t$  e  $\mathbf{r}$ , dove  $t$  è il tempo e  $\mathbf{r}$  un raggio vettore che identifica un certo punto fisso nello spazio, mentre nella forma Lagrangiana ogni quantità fisica, ad esempio la densità  $\rho$ , va vista come funzione del tempo  $t$  e del raggio  $\mathbf{r}_0$  a cui si trovava l'elemento di fluido che stiamo considerando al tempo iniziale. Schematicamente abbiamo:

$$\begin{aligned}\rho &= \rho(\mathbf{r}, t) && \text{Visione Euleriana} \\ \rho &= \rho(\mathbf{r}_0, t) && \text{Visione Lagrangiana}\end{aligned}\tag{3.20}$$

Nella visione Lagrangiana anche la coordinata di uno specifico elemento di fluido, seguito durante il suo moto, non essendo più la variabile indipendente, è funzione del raggio  $\mathbf{r}_0$  e del tempo  $t$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t).$$

Le due visioni sono ovviamente descrizioni equivalenti del sistema, ma è più facile imporre alcuni tipi di condizioni al bordo in una piuttosto che nell'altra. Nella visione Euleriana analizzeremo i casi  $T$ ,  $V$  e  $E$ ,  $V$  costanti (collasso isoterma e catastrofe gravotermica). Analizzeremo poi il caso in cui l'energia contiene un termine aggiuntivo. Nella visione Lagrangiana analizzeremo il caso  $P$  e  $T$  costanti (caso di Bonnor).

#### 3.3.2 Versione Euleriana

Linearizziamo le equazioni della fluidodinamica attorno alle configurazioni isoterme di equilibrio idrostatico. Le equazioni di partenza sono (si veda ad esempio [22]):

$$\begin{aligned}\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) &= 0 && \text{Equazione di continuità} \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{\nabla P}{\rho} - \nabla \Phi + \frac{\eta}{\rho} \nabla^2 \mathbf{v} + \frac{\zeta + \frac{2}{3}\eta}{\rho} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}) && \text{Equazione di Navier-Stokes} \\ P &= \rho \frac{kT}{m} && \text{Equazione di Stato}\end{aligned}\tag{3.21}$$

dove  $\rho$  è la densità,  $\mathbf{v}$  è il vettore velocità,  $P$  è la pressione,  $\eta$  e  $\zeta$  sono coefficienti di viscosità,  $\Phi$  è il potenziale gravitazionale. Nel seguito assumeremo simmetria sferica. Grazie a un teorema generale detto teorema di Antonov-Lebovitz (si veda ad esempio [3]) i modi non radiali sono stabili, e quindi non è necessario considerarli nella ricerca dell'instabilità. Sotto l'ipotesi di simmetria sferica, le equazioni (3.21) sono completate dalle seguenti:

$$\begin{aligned}\nabla \Phi &= \frac{GM(r)}{r^2} \hat{r}, \\ M(r) &= \int_0^r \rho(s) 4\pi s^2 ds.\end{aligned}\tag{3.22}$$

Dove  $\hat{r}$  è il versore radiale. Assumeremo che l'equazione di stato sia sempre quella del gas perfetto, lasciando però libera la possibilità che la temperatura possa variare nel tempo mantenendosi uniforme nello spazio (questo corrisponde ad assumere conducibilità termica infinita)

a seconda dei vincoli che imponiamo: per studiare l'evoluzione del sistema a contatto con un bagno termico la temperatura è tenuta costante, mentre per studiare un sistema ad energia costante supporremo che la temperatura vari istantaneamente in tutto il fluido, mantenendosi uniforme, in modo tale da mantenere l'energia totale (cinetica più gravitazionale) costante.

Linearizziamo ora le equazioni intorno alla posizione di equilibrio idrostatico. Il profilo di densità all'equilibrio idrostatico è dato dalla formula (2.67). Indichiamo con un pedice 0 le quantità imperturbate e con un pedice 1 le quantità al primo ordine. Tutte le equazioni verranno sviluppate al primo ordine nelle quantità col pedice 1. Definiamo quindi:

$$\begin{aligned}\rho(r, t) &= \rho_0(r) + \rho_1(r, t) \\ \mathbf{v}(r, t) &= \mathbf{v}_1(r, t) \\ T(t) &= T_0 + T_1(t)\end{aligned}\tag{3.23}$$

L'equazione di continuità e l'equazione di Navier-Stokes al primo ordine<sup>6</sup> diventano rispettivamente:

$$\partial_t \rho_1 + \nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1) = 0\tag{3.24}$$

$$\partial_t \mathbf{v}_1 = \left( \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \frac{\rho_1}{\rho_0} - \frac{\nabla \rho_1}{\rho_0} \right) \frac{kT_0}{m} - \frac{\nabla \rho_0}{\rho_0} \frac{kT_1}{m} - 4\pi G \frac{\int_0^r \rho_1(s, t) s^2 ds}{r^2} + \frac{\eta}{\rho_0} \nabla^2 \mathbf{v}_1 + \frac{\zeta + \frac{\eta}{3}}{\rho_0} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{v}_1)\tag{3.25}$$

Per trovare i modi normali del sistema, cerchiamo soluzioni della seguente forma:

$$\begin{aligned}\rho_1(r, t) &= \rho_1(r) e^{-i\omega t} \\ \mathbf{v}_1(r, t) &= \mathbf{v}_1(r) e^{-i\omega t} \\ T_1(t) &= T_1 e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{3.26}$$

Dopo quest'ultima sostituzione, ricavando  $\rho_1$  dall'equazione (3.24)

$$\rho_1 = \frac{\nabla \cdot (\rho_0 \mathbf{v}_1)}{i\omega},\tag{3.27}$$

e sostituendolo nella (3.25), chiamando  $v_1$  la componente radiale della velocità, sostituendo il gradiente con la derivata rispetto a  $r$  e utilizzando la formula per la divergenza in coordinate sferiche<sup>7</sup> otteniamo:

$$\begin{aligned}\omega^2 \rho_0 v_1 &= \left[ \frac{\partial_r \rho_0}{\rho_0} \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_0 v_1) - \partial_r \left( \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_0 v_1) \right) \right] \frac{kT_0}{m} - i\omega \partial_r \rho_0 \frac{kT_1}{m} - 4\pi G \rho_0^2 v_1 \\ &\quad + i\omega \left[ \eta \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \partial_r v_1) + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \partial_r \left( \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 v_1) \right) \right]\end{aligned}\tag{3.28}$$

Sostituendo  $\rho_0$  dall'equazione (2.67) nella (3.28), definendo  $f(r) \equiv \rho_0 v_1$ , cambiando variabili tramite l'usuale sostituzione  $r = [\tau_0/\rho_c]^{1/2} \xi$  dove  $\tau_0 = kT_0/4\pi Gm$  e indicando le derivate rispetto a  $\xi$  con un apice, otteniamo:

$$\begin{aligned}\frac{\omega^2}{4\pi G \rho_c} f &= \left[ -f'' - \left( \psi' + \frac{2}{\xi} \right) f' + \left( \frac{2}{\xi^2} - \frac{2\psi'}{\xi} \right) f \right] + \frac{i\omega}{4\pi G} \psi' e^{-\psi} \left( \frac{\rho_c}{\tau_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{kT_1}{m} - e^{-\psi} f \\ &\quad + \frac{i\omega}{4\pi G \rho_c \tau_0} \left[ \eta \frac{1}{\xi^2} (\xi^2 (f e^\psi)')' + \left( \zeta + \frac{\eta}{3} \right) \left( \frac{1}{\xi^2} (\xi^2 f e^\psi)' \right)' \right]\end{aligned}\tag{3.29}$$

Questa è l'equazione che descrive l'evoluzione delle perturbazioni in visione Euleriana nella forma più generale ottenuta in questa Tesi. Tiene conto di eventuali termini di viscosità e che

<sup>6</sup>nell'equazione di Eulero i termini di ordine zero si eliminano grazie alla condizione di equilibrio idrostatico

<sup>7</sup>

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 A_r)$$

la temperatura possa variare nel tempo (mantenendosi uniforme nello spazio). Ingredienti necessari per poterla risolvere sono le condizioni al contorno, di cui possiamo pensare fare parte anche la regola con cui la temperatura cambia al variare del tempo. Nelle prossime sezioni analizzeremo l'equazione sotto diverse condizioni al contorno, ritrovando i punti di instabilità già trovati nell'analisi termodinamica.

Prima di procedere facciamo alcune osservazioni: innanzitutto il termine di viscosità nell'equazione (3.29) scompare nel caso  $\omega = 0$ , dunque il punto di stabilità marginale non dipende dalla viscosità. Potrebbe sembrare che anche il termine con  $T_1$  scompaia nello stesso caso, ma non è così perché  $T_1$  potrà essere proporzionale a  $1/\omega$ , rendendo il termine finito nel limite  $\omega \rightarrow 0$ . L'equazione in presenza di viscosità è stata riportata per completezza e per poter fare questa osservazione: d'ora in poi ci occuperemo solamente del caso non viscoso.

Per completare la Sezione definiamo il seguente operatore differenziale (corrispondente al membro a destra dell'equazione (3.29) per  $\omega = 0$ ):

$$\mathcal{L} \equiv -\frac{d^2}{d\xi^2} - \left[ \frac{2}{\xi} + \psi' \right] \frac{d}{d\xi} + \left[ \frac{2}{\xi^2} - \frac{2\psi'}{\xi} - e^{-\psi} \right], \quad (3.30)$$

e osserviamo le seguenti proprietà dell'operatore  $\mathcal{L}$ , che si dimostrano in maniera diretta sfruttando l'equazione di Emden (2.66) per sostituire le derivate seconde ogni qualvolta compaiano:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi') &= -e^{-\psi}\psi' \\ \mathcal{L}(\xi e^{-\psi}) &= -e^{-\psi}\psi' \end{aligned} \quad (3.31)$$

Queste proprietà ci saranno utili per trovare le soluzioni analitiche alle equazioni nei casi di stabilità marginale.

### 3.3.2.1 Caso con Temperatura e Volume Costanti (Collasso Isoterma)

Studiamo in questa Sezione il caso che si rivela matematicamente più semplice. Questo caso è stato studiato con metodi diversi in [35] e la stabilità marginale è stata studiata in [7]. Il sistema è pensato a contatto con un bagno termico esterno che ne mantiene costante la temperatura (che, ricordiamo, in questo approccio è solo un parametro che caratterizza l'equazione di stato), quindi  $T_1 = 0$  nella (3.29). Trascurando anche il termine di viscosità la (3.29) diventa:

$$Lf = -f'' - \left(\psi' + \frac{2}{\xi}\right)f' + \left(\frac{2}{\xi^2} - \frac{2\psi'}{\xi} - e^{-\psi}\right)f \quad (3.32)$$

dove  $L = \omega^2/4\pi G\rho_c$ . Le condizioni al contorno sono:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\Xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.33)$$

La prima condizione, ricordando che  $f = \rho_0 v_1$  e che  $\rho_0(0)$  è un numero finito, assicura che la velocità sia nulla al centro come richiesto dalla simmetria del problema. La seconda condizione dice che al bordo della scatola la velocità è nulla, imponendo così la condizione di volume costante e che non possa entrare o uscire materia attraverso le pareti.

L'equazione (3.32) con le condizioni al contorno (3.33), fissato  $\Xi$ , è così un'equazione agli autovalori che ammette soluzione solo per certi valori discreti di  $L$ . Tale equazione può essere riportata a una forma identica a un'equazione di Schrödinger unidimensionale (Sottosezione 3.3.2.1), cosa che aiuta a riconoscere le soluzioni da un punto di vista intuitivo.

Ci aspettiamo i seguenti risultati: per valori bassi del parametro  $\Xi$  (cioè quando gli effetti della gravità sono poco importanti e ci troviamo molto a destra nell'isoterma, figura 2.2(a)) esistono solo autovalori positivi di  $L$ , e quindi solo configurazioni stabili. All'aumentare di  $\Xi$  si raggiungerà a una situazione di stabilità marginale in cui esiste un modo con  $L = 0$ . Aumentando ulteriormente  $\Xi$  ci saranno soluzioni con  $L < 0$ , e quindi instabili.

Per trovare le autofunzioni e gli autovalori, abbiamo proceduto nel seguente modo. Fissato  $L$ , si risolve l'equazione (3.32) con le seguenti condizioni al contorno<sup>8</sup>

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Nella soluzione trovata si cercano i valori di  $\xi$  tali che  $f(\xi) = 0$ ; per tali valori di  $\xi$ , identificati con  $\Xi$ , avremo così trovato una soluzione con le condizioni al contorno (3.33) e con  $L$  pari al valore fissato inizialmente. Variando  $L$  si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione.

I risultati sono i seguenti: per  $0 < \Xi < 8.99$  ci sono solo modi con  $L > 0$ . Per  $\Xi = 8.99$  si instaura il primo modo con  $L = 0$ . Aumentando  $\Xi$  continua a esserci un solo modo, la cui  $L$  varia fino a raggiungere un valore di circa  $L = -0.0419$ , fino a che per  $\Xi = 98.09$  si instaura il secondo modo instabile, il cui valore di  $L$  è sempre compreso tra quello del primo modo instabile e zero. Continuando ad aumentare  $\Xi$  si instaurano infiniti altri modi instabili (si veda anche il paragrafo sulla soluzione analitica). Il valore minimo che assume  $L$  all'aumentare di  $\Xi$  è molto vicino a  $L = -0.0419$  (si veda la figura 3.2).

Si osservi che i valori di  $\Xi$  che instaurano i vari modi instabili sono gli stessi di quelli che si trovano con i metodi termodinamici per le stesse condizioni al bordo. Ciò si può verificare analiticamente grazie alla soluzione analitica dell'equazione fornita nel prossimo paragrafo, confrontandola con le equazioni che definiscono per esempio l'isoterma: si trova che i punti di tangente verticale dell'isoterma e di stabilità marginale nel caso che stiamo considerando coincidono perché devono soddisfare alla stessa equazione algebrica (si confronti anche con la tabella 3.1). In generale ad ogni tangente verticale dell'isoterma, per cui avevamo già mostrato che compare una nuova instabilità termodinamica con il metodo delle serie lineari, si instaura un nuovo modo di instabilità dinamica. Dunque anche il numero di modi instabili termodinamici e dinamici coincidono, per ogni valore di  $\Xi$ .

Nelle figure 3.4, 3.5, 3.6 sono mostrate rispettivamente le soluzioni dell'equazione (3.32), il profilo di velocità  $v_1$  e il profilo di densità  $\rho_1$  per tre valori del parametro  $\Xi$ , relative al modo di  $L$  minimo. Nella figura 3.2 è mostrato l'autovalore  $L$  minimo in funzione del parametro  $\Xi$ .

### Soluzione Analitica del Caso $L = 0$ (Caso di Stabilità Marginale)

L'equazione (3.32) può essere riscritta utilizzando l'operatore  $\mathcal{L}$  definito in (3.30) nel seguente modo:

$$Lf = \mathcal{L}(f) \quad (3.35)$$

Dalle proprietà 3.31 segue immediatamente che la combinazione

$$G(\xi) \equiv \psi' - \xi e^{-\psi} \quad (3.36)$$

è soluzione dell'equazione (3.35) per  $L = 0$ . Tale soluzione soddisfa la condizione al contorno (3.33) nell'origine. Gli altri zeri di questa funzione sono i valori di  $\Xi$  a cui si instaurano nuovi modi instabili. Grazie alla soluzione analitica dell'equazione possiamo sfruttare le formule per l'andamento asintotico dell'equazione di Emden per capire come vanno gli zeri di  $G(\xi)$  nel limite  $\xi \rightarrow \infty$ . Utilizzando le formule (2.37) e (2.38) si ottiene la seguente espressione asintotica per  $G(\xi)$ :

$$\psi' - \xi e^{-\psi} \simeq \frac{A \left( \sqrt{7} \sin \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \xi + \phi \right) - 3 \cos \left( \frac{\sqrt{7}}{2} \log \xi + \phi \right) \right)}{2\xi^{3/2}} \quad (\xi \rightarrow \infty) \quad (3.37)$$

Da questo si deduce che il rapporto tra due zeri successivi per grandi  $\xi$  tende a una costante pari a

$$e^{\frac{2\pi}{\sqrt{7}}},$$

e dunque la successione degli zeri tende ad essere una progressione geometrica di tale rapporto.

<sup>8</sup> Notiamo che poiché l'equazione è lineare in  $f$ , cambiando il valore di  $f'(0)$  otteniamo come soluzione la stessa funzione moltiplicata per una costante.

### Riduzione a Forma Simile all'Equazione di Schrodinger

In questa Sezione vogliamo ridurre l'equazione differenziale (3.32) a una forma equivalente a un'equazione di Schrodinger unidimensionale, in modo da poterne disegnare il potenziale equivalente e avere un migliore quadro intuitivo della situazione.

Supponiamo di avere un'equazione differenziale della forma

$$-y''(x) - a(x)y'(x) - b(x)y(x) = Ey(x), \quad (3.38)$$

dove  $E$  è un numero reale. Si verifica che effettuando il seguente cambio di variabile,

$$y(x) = h(x)e^{-\int_{x_0}^x \frac{a(t)}{2} dt}, \quad (3.39)$$

dove  $x_0$  è punto arbitrario del dominio di  $y$ , l'equazione differenziale (3.38) diventa

$$-h''(x) + h(x) \left( \frac{a'(x)}{2} + \frac{a(x)^2}{4} - b(x) \right) = Eh(x), \quad (3.40)$$

che è uguale a un'equazione di Schrodinger unidimensionale con potenziale dato da

$$V(x) \equiv \frac{a'(x)}{2} + \frac{a(x)^2}{4} - b(x). \quad (3.41)$$

Nel caso dell'equazione (3.32) si hanno le seguenti identificazioni con l'equazione (3.38):

$$\begin{aligned} a(x) &\rightarrow \psi' + \frac{2}{\xi} \\ b(x) &\rightarrow e^{-\psi} + \frac{2\psi'}{\xi} - \frac{2}{\xi^2}. \end{aligned}$$

Dunque l'equazione (3.32) viene trasformata nella seguente:

$$-\tilde{f}''(\xi) + \tilde{f}(\xi) \left( \frac{2}{\xi^2} + \frac{1}{4}\psi'(\xi)^2 - \frac{2}{\xi}\psi'(\xi) - \frac{1}{2}e^{-\psi(\xi)} \right) = L\tilde{f}(\xi) \quad (3.42)$$

Dove  $\tilde{f}$  si ottiene da  $f$  tramite il cambio di variabile (3.39). Le condizioni al contorno rimangono le stesse dell'equazione (3.32):

$$\tilde{f}(0) = 0$$

$$\tilde{f}(\Xi) = 0.$$

Il potenziale è mostrato nella figura 3.3. Scegliere uno specifico  $\Xi$  equivale a considerare un potenziale che si tronca per quel valore di  $\xi$ , e vale infinito per  $\xi > \Xi$ . Questo potenziale troncato rappresenta una buca di potenziale di cui trovare gli autovalori. È allora intuitivo dalla forma del potenziale che per  $\Xi$  troppo piccoli non esistono autovalori negativi perché il potenziale è positivo. Aumentando il valore di  $\Xi$  la buca il potenziale può diventare negativo e, se lo diventa abbastanza, possono esistere autovalori negativi, che aumentano in numero all'aumentare di  $\Xi$ . Per  $\Xi = \infty$  gli autovalori negativi sono infiniti, e si accumulano a ridosso dello zero, similmente a quanto succede ad esempio per i livelli energetici dell'atomo di idrogeno.

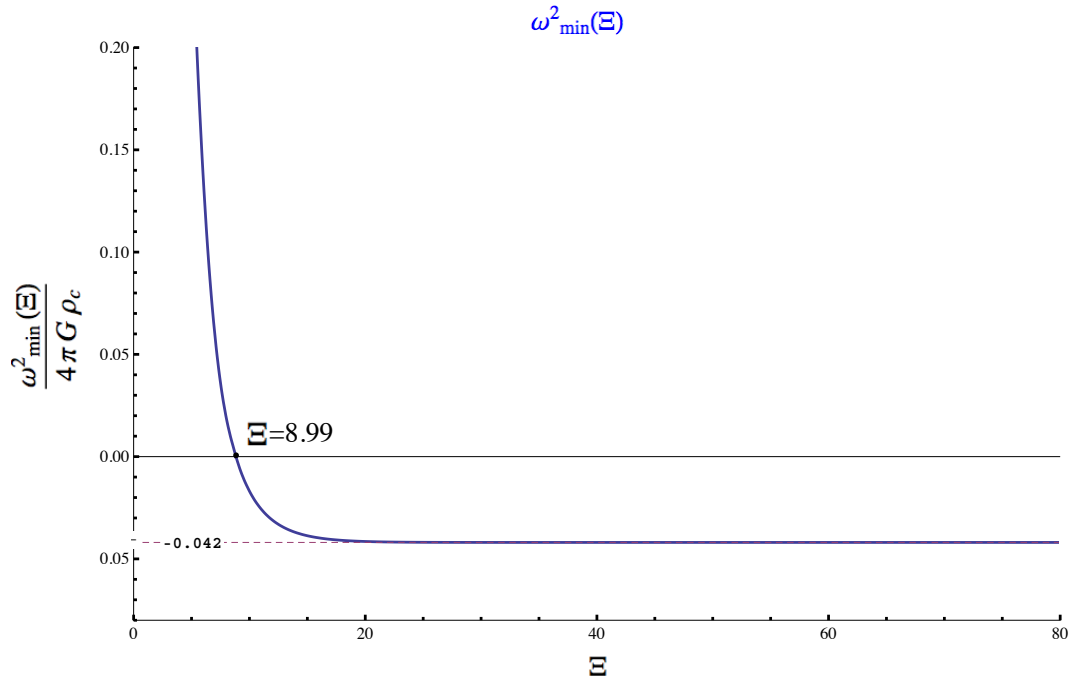


Figura 3.2: L'autovalore minimo dell'equazione (3.32), che se risolta permette di trovare i modi normali per il caso con  $T$  e  $V$  costanti, in funzione del raggio adimensionale  $\Xi$ . Si vede che è minore di zero, indicando che esistono stati instabili, per  $\Xi > 8.99$ . Permette di valutare i tempi scala su cui avviene il collasso, almeno nella fase in cui il regime lineare è valido.

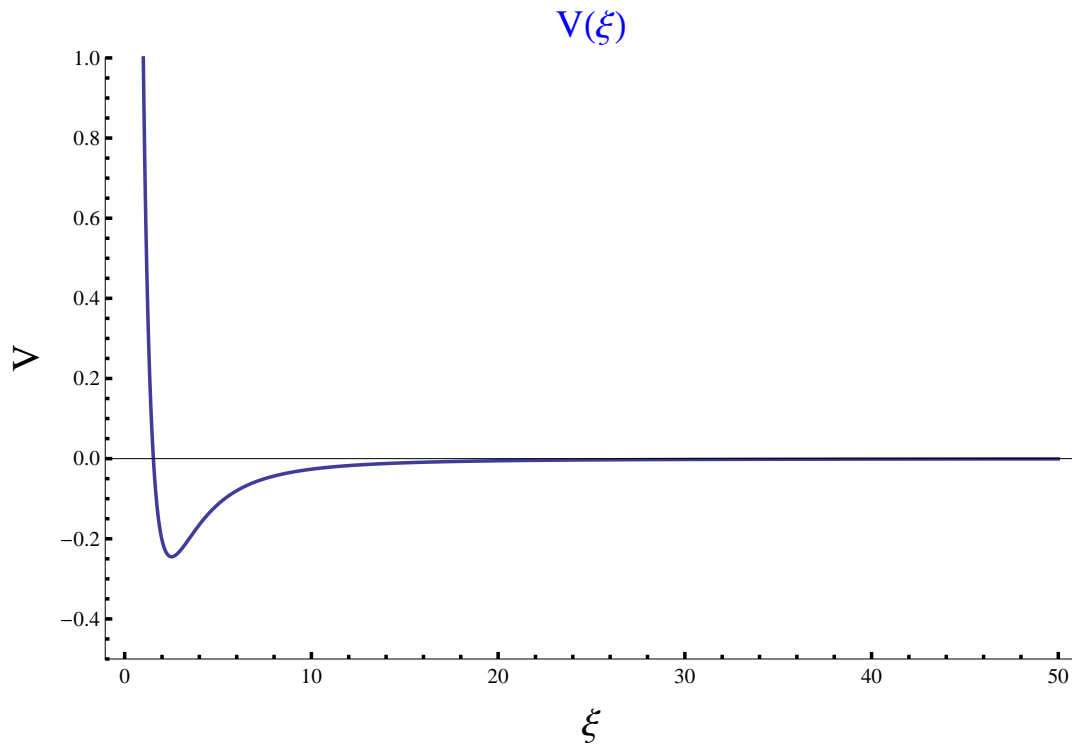


Figura 3.3: L'equazione differenziale (3.32), che permette di trovare i modi normali del fluido nel caso  $T$  e  $V$  costanti, ha gli stessi autovalori di un'equazione di Schrodinger unidimensionale con questo potenziale troncato per  $\xi$  pari a  $\Xi$ , che è il valore del raggio adimensionale del sistema (per  $\xi > \Xi$  si prende  $V = \infty$ ). La forma analitica del potenziale  $V$  si legge dall'equazione tipo Schrödinger (3.42).

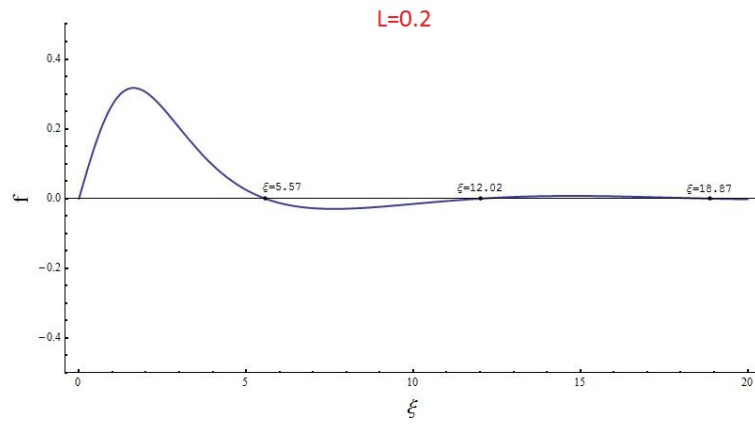
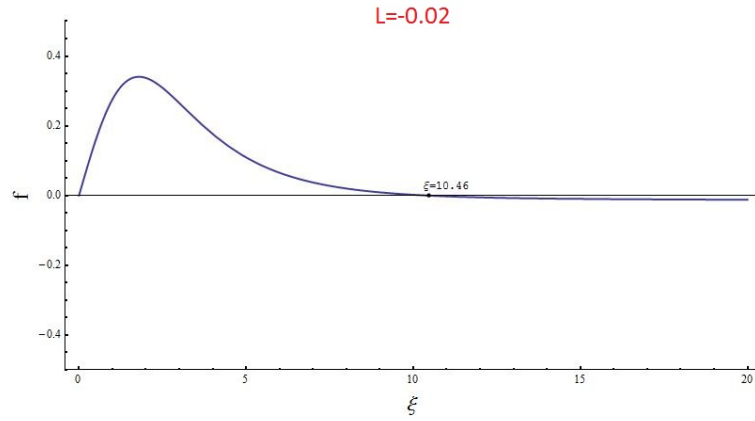
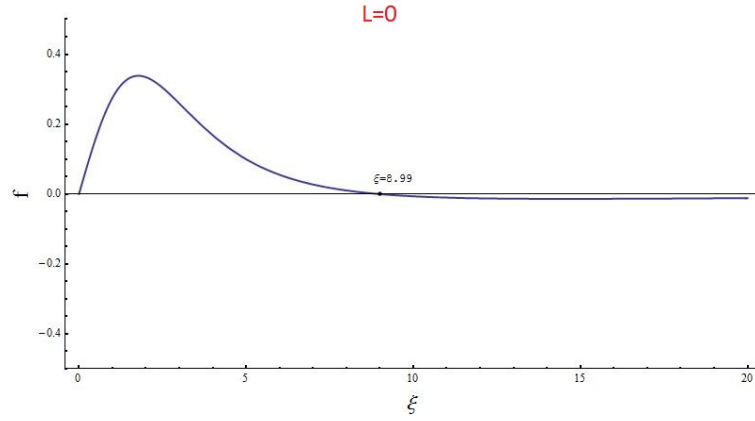


Figura 3.4: Soluzioni dell'equazione (3.32) per tre diversi valori di  $L = \{0, -0.02, 0.2\}$ . Sono segnati gli zeri e il corrispondente valore di  $\xi$ . Se si pone  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) pari al valore di uno degli zeri, si ottiene una soluzione dell'equazione (3.32) (che è l'equazione da risolvere per trovare i modi normali del sistema) con le corrette condizioni al contorno (3.33), e dunque rappresenta un modo normale. Nelle figure 3.5 e 3.6 mostriamo i corrispondenti profili di densità e velocità.



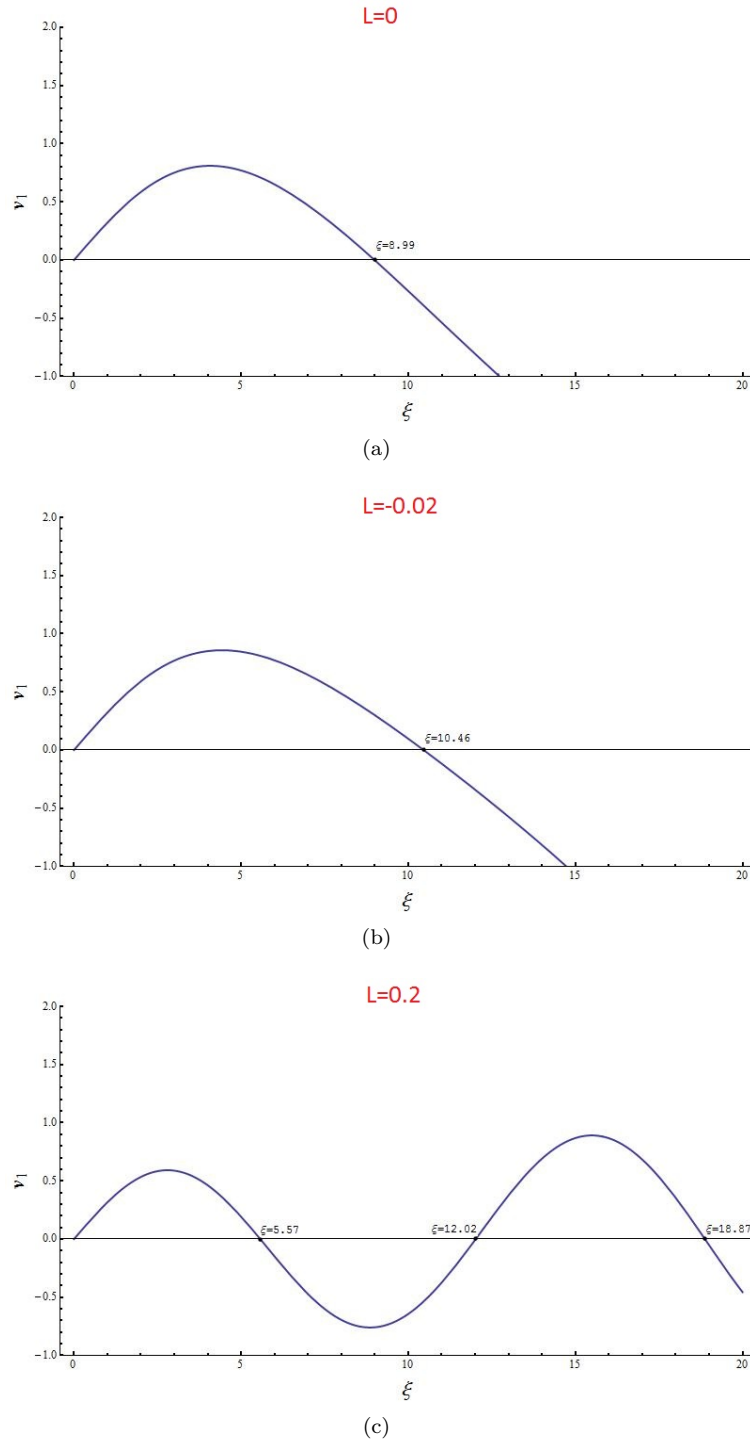


Figura 3.5: Profili di velocità per i modi normali riportati nella figura 3.4. Sono segnati gli zeri e il corrispondente valore di  $\xi$ . Modi normali che rispettano le corrette condizioni al contorno hanno  $\Xi$  pari agli zeri di questi profili.

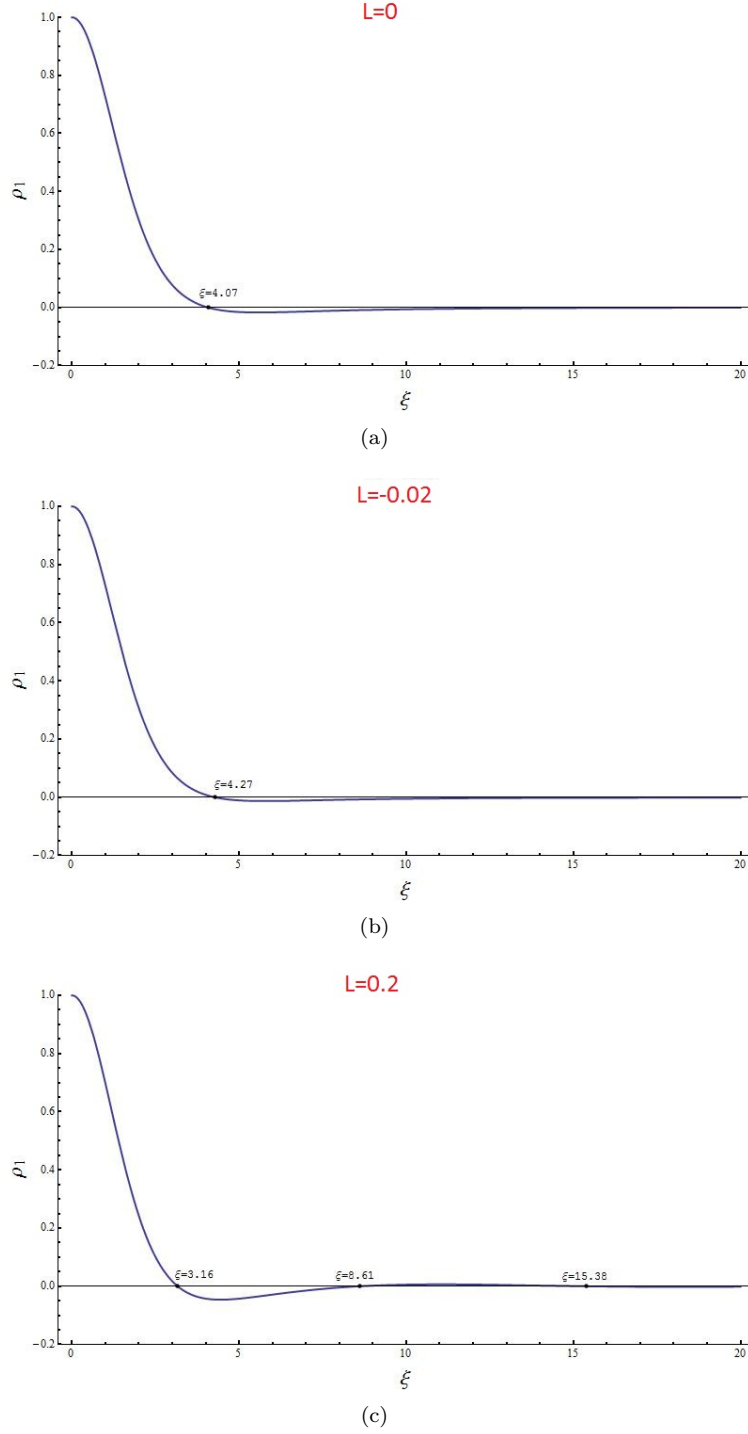


Figura 3.6: Profili di densità per i modi normali riportati nella figura 3.4. Sono segnati gli zeri e il corrispondente valore di  $\xi$ . Tali profili vanno immaginati troncati per  $\Xi$  pari agli zeri delle soluzioni riportate nella figura 3.4. Si noti l'assenza della struttura nucleo-alone (definiamo un modo avere struttura nucleo-alone se ci sono due zeri nel profilo di densità per  $\xi < \Xi$ , si veda anche la Sezione per il caso con  $E$  e  $V$  costanti) per il primo modo instabile, presente invece nei modi di frequenza minima a  $E$  costante (si veda il testo del paragrafo relativo e si confronti con la figura 3.11). (a) Nel caso di stabilità marginale c'è un punto fisso nello spazio,  $\xi = 4.07$ , in cui la densità rimane sempre la stessa al variare del tempo. Questo punto è lo stesso in cui la derivata rispetto al raggio della massa inizia a diminuire, vedi figura 2.4(d).

### 3.3.2.2 Caso con Energia e Volume Costante (Catastrofe Gravotermica)

Vogliamo studiare in questa Sezione un fluido in una scatola, la cui energia totale viene mantenuta costante. Questo è il caso che Lynden-Bell e Wood hanno chiamato “catastrofe gravotermica”. Poiché il sistema risulta isolato (non a contatto con un bagno termico), tra quelli che studiamo è il caso più affine alla situazione di un ammasso globulare. L’energia totale del fluido

$$E = \frac{3}{2}NkT + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.43)$$

ha due termini, che rappresentano rispettivamente l’energia cinetica totale e l’energia gravitazionale. Mentre il fluido si muove, l’energia gravitazionale varia. Supporremo qui che l’energia cinetica totale vari in conseguenza alla variazione di energia gravitazionale in modo da mantenere l’energia totale costante. Supponiamo inoltre che la temperatura si mantenga uniforme ad ogni istante e che la distribuzione di velocità del gas sia localmente Maxwelliana: l’assunzione di temperatura uniforme corrisponde all’assumere conducibilità termica infinita. In termini dei tempi scala introdotti nel primo capitolo, siamo nelle seguenti ipotesi:

$$\tau_{\text{LTE}} \ll \tau_d$$

$$\tau_{\text{GTE}} \ll \tau_d.$$

La (3.29) diventa, utilizzando anche la definizione (3.30):

$$Lf = \mathcal{L}f + \frac{i\omega}{4\pi G} \left[ \frac{\rho_c}{\tau} \right]^{\frac{1}{2}} \frac{kT_1}{m} e^{-\psi} \psi' \quad (3.44)$$

Ora dobbiamo trovare la temperatura in funzione della distribuzione di densità per una data energia totale, in regime lineare e quindi di piccole perturbazioni. Partendo dalla formula (2.51) per l’energia totale:

$$E = \frac{3}{2}NkT + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) d^3r = \frac{3}{2}NkT - \frac{G}{2} \int \frac{\rho(\mathbf{r})\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r d^3r' \quad (3.45)$$

Sostituendo  $T = T_0 + T_1$ ,  $\rho = \rho_0 + \rho_1$  in quest’ultima equazione e imponendo che l’energia non vari al prim’ordine nelle quantità con pedice 1 otteniamo la seguente espressione per  $T_1$ :

$$T_1 = - \frac{\int \rho_1(\mathbf{r})\Phi_0(\mathbf{r}) d^3r}{\frac{3}{2}Nk} \quad (3.46)$$

Dove  $\Phi_0$  è il potenziale gravitazionale dovuto alla distribuzione di densità  $\rho_0$ . Utilizzando la formula (2.13) e ricordando che per la conservazione della massa totale  $\int \rho_1(\mathbf{r}) d^3r = 0$  otteniamo:

$$T_1 = - \frac{\int \rho_1(r)\psi(r) d^3r}{\frac{3}{2}Nm} T_0. \quad (3.47)$$

Utilizzando ora l’equazione (3.27), la forma della divergenza in coordinate sferiche, la definizione  $f = \rho_0 v_1$  e passando alla usuale variabile adimensionale  $\xi$  si ottiene:

$$T_1 = -4\pi \frac{\tau}{\rho_c} \frac{\int_0^\Xi \partial_\xi (\xi^2 f(\xi)) \psi(\xi) d\xi}{i\omega \frac{3}{2}Nm} T_0 \quad (3.48)$$

Sostituendo quest’ultima nella (3.44) e utilizzando  $N = \frac{M}{m}$  e la (2.69) otteniamo:

$$Lf = \mathcal{L}f - \psi' e^{-\psi} \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \psi(\xi) \partial_\xi (\xi^2 f(\xi)) d\xi. \quad (3.49)$$

Per gli stessi motivi che nel caso a  $V$  e  $T$  costanti, fissati  $L$  e  $\Xi$  le condizioni al contorno opportune sono:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f(\Xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Integrando la (3.49) per parti utilizzando le condizioni al contorno otteniamo:

$$Lf = \mathcal{L}f + \psi' e^{-\psi} \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) f(\xi) d\xi \quad (3.51)$$

Notiamo che quest'ultima equazione non è una normale equazione differenziale, ma contiene in sé un vincolo globale dato dall'integrale.

Per ottenere delle soluzioni numeriche dell'equazione (3.51) con le condizioni al contorno (3.50), procediamo nel seguente modo: consideriamo l'equazione

$$Lf = \mathcal{L}f + k\psi' e^{-\psi} \quad (3.52)$$

Dove  $k$  è un numero reale costante. Risolviamo numericamente l'equazione (3.52) per  $L$  e  $k$  fissati con le seguenti condizioni al contorno<sup>9</sup>:

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \\ f'(0) &= 1 \end{aligned} \quad (3.53)$$

troviamo gli zeri della soluzione  $f$  ottenuta e in questi punti calcoliamo la quantità:

$$q \equiv \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (3.54)$$

Se  $k = q$  abbiamo trovato una soluzione dell'equazione (3.51) con le condizioni al contorno (3.50), dove  $\Xi$  è lo zero trovato e  $L$  quello che era stato fissato all'inizio. Se  $k \neq q$  allora variamo  $k$  finché  $k$  e  $q$  coincidono. Così si trovano le soluzioni dell'equazione per un fissato  $L$ . Adesso variando  $L$  si ottengono tutte le soluzioni dell'equazione.

I risultati sono mostrati nelle figure dalla 3.7 alla 3.16, dove vengono mostrate le soluzioni dell'equazione e i profili di densità e di velocità per alcuni valori di  $L$  e l'autovalore  $L$  minimo in funzione del parametro  $\Xi$ . Per  $0 < \Xi < 34.363$  ci sono solo modi con  $L > 0$ . Per  $\Xi = 34.364$ , corrispondente a un rapporto fra la densità centrale e la densità al bordo pari a 709, si instaura il primo modo con  $L = 0$ . Aumentando  $\Xi$  compaiono infiniti nuovi modi instabili, analogamente al caso con  $T$  e  $V$  costanti. Il valore minimo che assume  $L$  all'aumentare di  $\Xi$  è molto vicino a  $L = -0.0419$  (si veda la figura 3.7).

Si trova quindi per gli autovalori un andamento simile a quello del caso a  $T$  e  $V$  costanti, con la differenza che l'instabilità viene innescata per valori di  $\Xi$  un po' più alti (si confronti la figura 3.2 con la 3.7). L'innescarsi della instabilità anche in questo caso avviene esattamente nello stesso punto che per l'analisi termodinamica, si veda la tabella 3.1). Il valore minimo di  $L$  rimane esattamente lo stesso per i casi con  $E$  e  $V$  o  $T$  e  $V$  costanti, ma nel caso con  $T$  e  $V$  costanti questo valore minimo viene raggiunto molto più velocemente all'aumentare di  $\Xi$ , mentre nel caso  $E$  e  $V$  costanti c'è un appiattimento del grafico 3.7 attorno al punto di stabilità marginale (la parte sinistra della figura 3.7 è sollevata rispetto alla stessa parte della figura 3.2).

Come già trovato da [32] per l'instabilità termodinamica, il profilo di densità che innesca l'instabilità nel caso marginale ( $\Xi = 34.364$ ) presenta una struttura nucleo-alone (core-halo). Definiamo il profilo di densità avente una struttura nucleo-alone quando abbia due zeri per  $\xi < \Xi$ , e quindi si può pensare che ci siano un "nucleo" e un "alone" più densi separati da un'area di "svuotamento" nel mezzo. In effetti, si può verificare che l'equazione (3.51) coincide, nel caso di stabilità marginale, con l'equazione trovata con metodi termodinamici da Padmanabhan [32] se scritta in termini delle stesse variabili. Per definizione, nei modi con struttura nucleo-alone ci sono due punti in cui la densità rimane costante al variare del tempo, mentre per i modi senza tale struttura vi è un solo punto. Osservando i profili di densità nelle figure, che fissato  $\Xi$  si riferiscono ai modi di  $L$  minimo, la struttura nucleo-alone

<sup>9</sup>poiché l'equazione è lineare in  $f$ , compreso il vincolo globale, il particolare valore di  $f'(0)$  è irrilevante, tutte le soluzioni saranno uguali a meno di riscaldamento.

è più pronunciata per i modi con  $L < 0$ , mentre tende a scomparire per i modi con  $L > 0$ . In particolare si vede che per  $L$  compreso tra 0.021 e 0.022 la struttura nucleo-alone scompare. Inoltre si vede dai profili di velocità che i modi con struttura nucleo-alone sono caratterizzati da un punto intermedio in cui la velocità è nulla.

La presenza di una struttura nucleo-alone è messa in relazione con l'interpretazione della catastrofe gravotermica data inizialmente da Lynden-Bell e Wood, spiegata nella Sezione (3.1). La parte di alone è la parte che avrebbe dovuto fungere, in questa interpretazione, da parte esterna con calore specifico positivo che scambia calore con la parte interna (nucleo) a calore specifico negativo. Seguendo questa interpretazione, nel caso della catastrofe gravotermica (caso  $E$ ,  $V$  costanti) ci si aspetta una struttura nucleo-alone per l'innescarsi dell'instabilità, mentre nel caso del collasso isoterma (caso  $T$ ,  $V$  costanti) no, e questo è coerente coi risultati trovati (si veda anche [7]). La struttura nucleo-alone non appare però suscettibile della stessa interpretazione nel contesto fluido. Un'interpretazione, coerente con il contesto fluido, del fatto che il valore di  $\Xi$  del primo modo instabile è più alto nella catastrofe gravotermica rispetto al collasso isoterma è fornito nel paragrafo in cui si discute un termine aggiuntivo dell'energia.

### Soluzione Analitica del Caso $L = 0$ (Stabilità Marginale)

Come per il collasso isoterma, possiamo ottenere una soluzione analitica dell'equazione per la stabilità marginale. L'equazione (3.49) si può riscrivere:

$$\mathcal{L}f = -A\psi'e^{-\psi} \quad (3.55)$$

dove  $A = \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2\psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) f(\xi) d\xi$  non dipende da  $\xi$ , ma solo globalmente da  $f$ . Sfruttando le proprietà (3.31) dell'operatore  $\mathcal{L}$ , cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$f = a\psi' + b\xi e^{-\psi}, \quad (3.56)$$

con  $a$  e  $b$  costanti<sup>10</sup>. Sostituendo la (3.56) nella (3.55) otteniamo la prima condizione su  $a$  e  $b$ :

$$a + b = A. \quad (3.57)$$

Esplicitando  $A$  e dividendo per  $b$  otteniamo

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2\psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) \left( \frac{a}{b} \psi'(\xi) + \xi e^{-\psi(\xi)} \right) d\xi \quad (3.58)$$

Abbiamo poi una seconda condizione su  $a/b$  dal fatto che  $f(\Xi) = 0$ :

$$\frac{a}{b} \psi'(\Xi) + \Xi e^{-\psi(\Xi)} = 0. \quad (3.59)$$

Sostituendo  $a/b$  dall'ultima equazione nella prima otteniamo

$$\boxed{\frac{3}{2}\Xi^2 \left( \psi'(\Xi) - \Xi e^{-\psi(\Xi)} \right) = \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) \left( \xi e^{-\psi(\xi)} - \psi'(\xi) \frac{\Xi e^{-\psi(\Xi)}}{\psi'(\Xi)} \right) d\xi} \quad (3.60)$$

I valori di  $\Xi$  che soddisfano l'equazione (3.55) sono quelli per cui l'equazione (3.60) ammette soluzione. In particolare il più basso di essi sarà quello a cui si innesci l'instabilità, che sappiamo essere circa  $\Xi = 34.36$ . Si verifica che l'equazione (3.60) è risolta dagli stessi valori a cui il grafico 2.2(c) ha tangente orizzontale, dunque ad ogni nuovo modo instabile termodinamico ne corrisponde uno dinamico. La ricerca delle soluzioni dell'equazione algebrica (3.60) è mostrata nella figura 3.8. Si veda anche la figura 3.17 per  $v = 0$  (per la definizione di  $v$  si veda la formula (3.61) e spiegazioni sottostanti).

<sup>10</sup>Notiamo che siccome l'equazione (3.49) è lineare in  $f$  se una certa soluzione viene moltiplicata per una costante è ancora soluzione, e quindi conta solo il rapporto  $a/b$ .

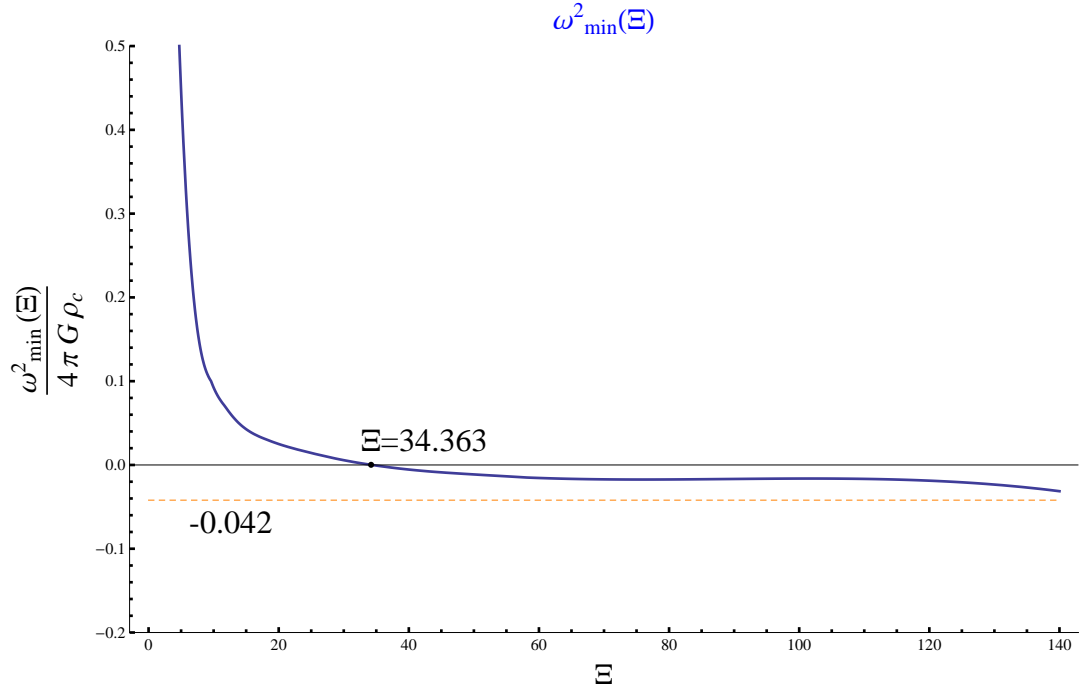


Figura 3.7: L'autovalore minimo dell'equazione (3.51), che se risolta permette di trovare i modi normali per il caso con  $E$  e  $V$  costanti, in funzione del raggio adimensionale  $\Xi$ . Si vede che è minore di zero, indicando che esistono stati instabili, per  $\Xi > 34.363$ , corrispondente a un contrasto di densità tra il centro e il bordo pari a circa 709. Permette di valutare i tempi scala su cui avviene il collasso, almeno nella fase in cui il regime lineare è valido. Si noti che la frequenza minima raggiungibile (per  $\Xi \rightarrow \infty$ ) è la stessa che nel caso del collasso isoterma (figura 3.2), ma la parte sinistra del grafico è “sollevata” rispetto a quest'ultimo.

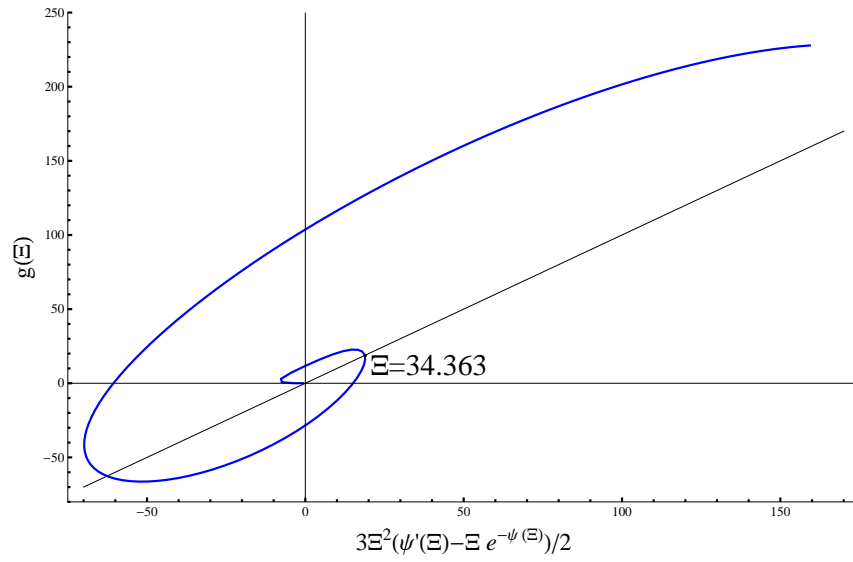


Figura 3.8: Il membro destro e sinistro dell'equazione (3.60) (il membro destro è stato denotato con  $g(\Xi)$  per brevità) graficati parametricamente al variare di  $\Xi$ . Per  $\Xi = 0$  si parte dall'origine, e poi si segue la spirale verso il fuori. Le intersezioni della spirale con la bisettrice sono le soluzioni dell'equazione.

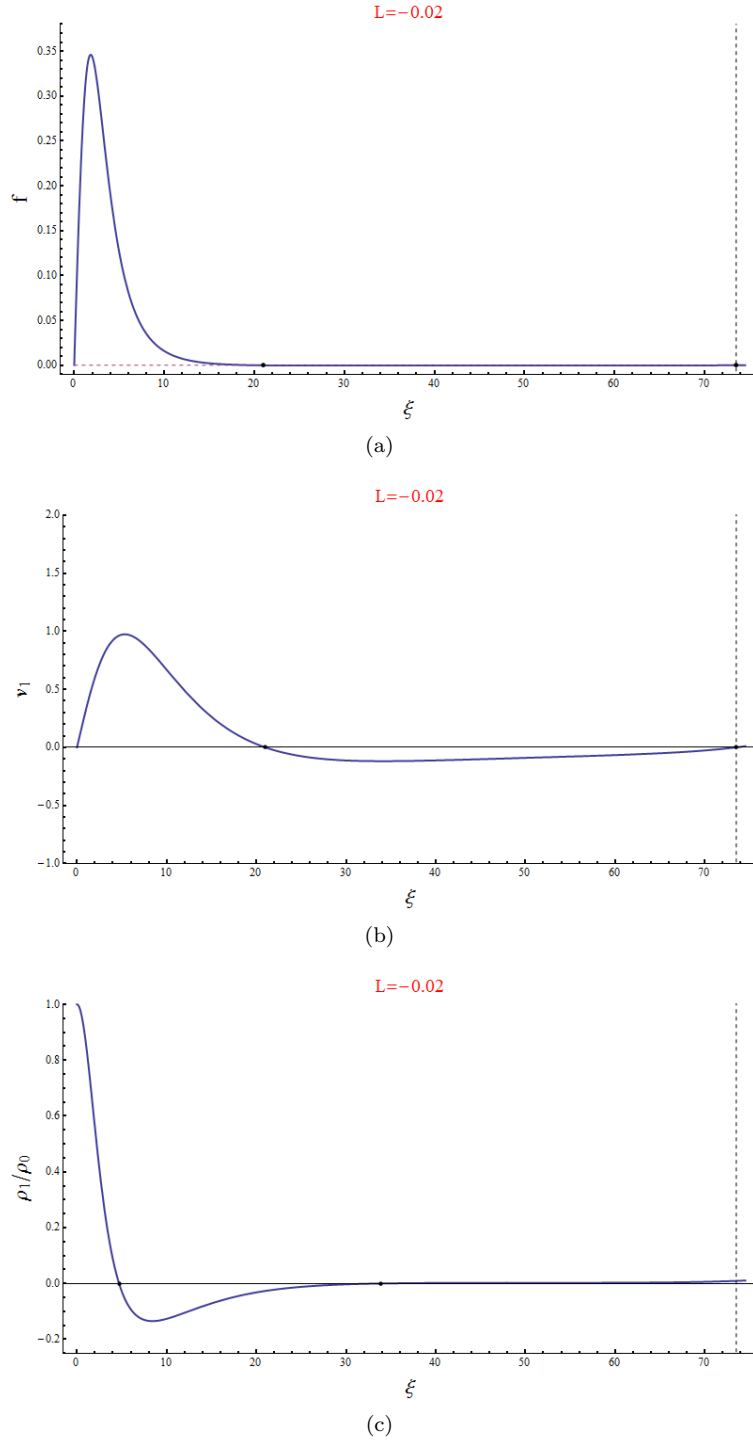


Figura 3.9: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = -0.02$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità.



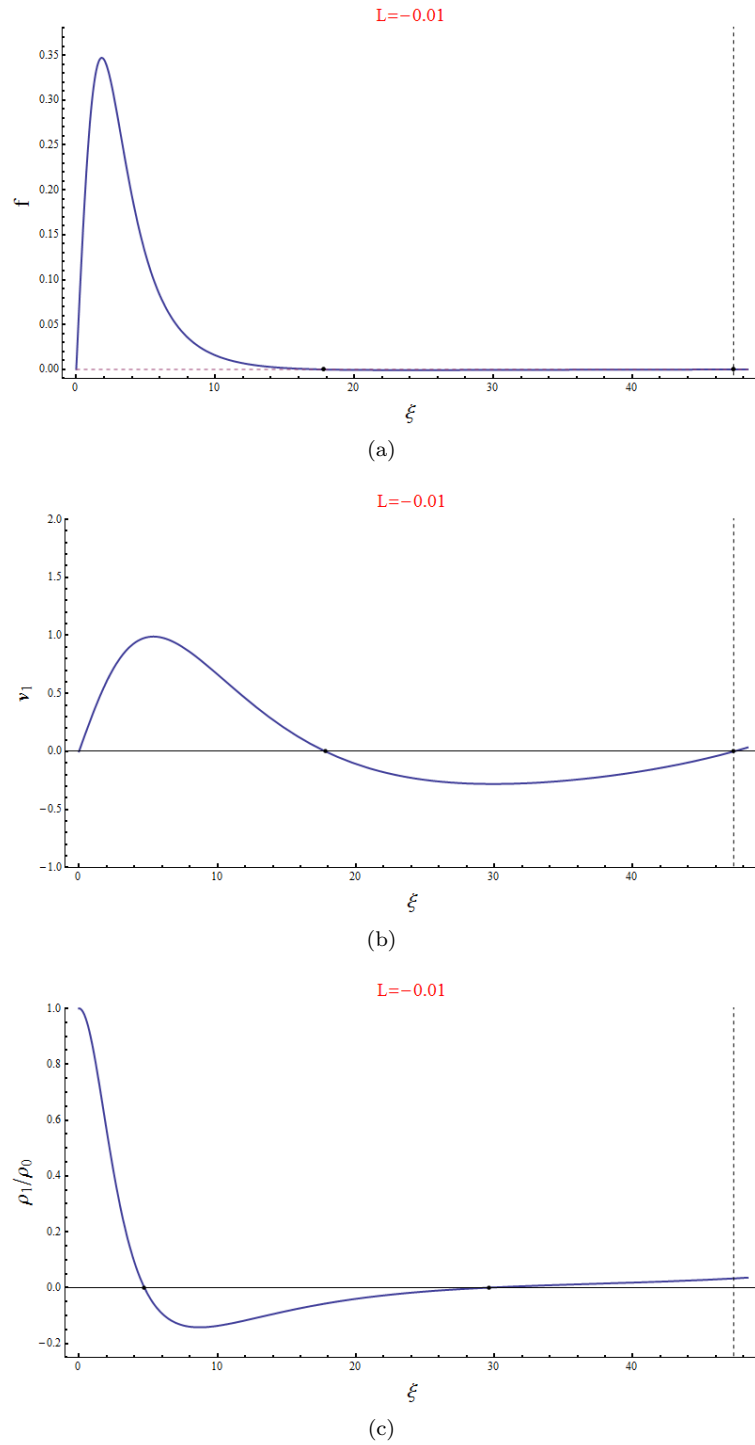


Figura 3.10: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = -0.01$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità.

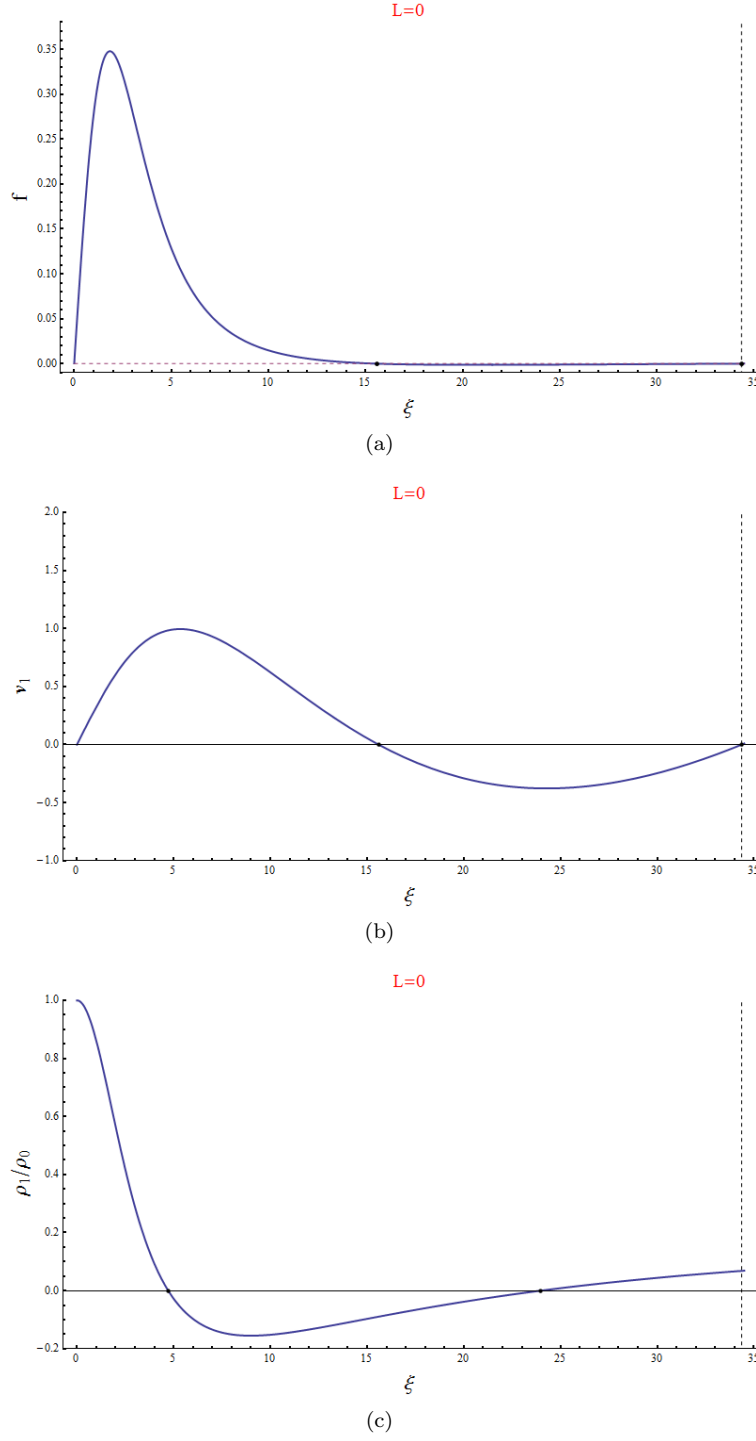


Figura 3.11: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = 0$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità. Si noti la presenza di una struttura nucleo-alone (definita nel testo) già trovata e fatta notare per il caso  $L = 0$  da Padmanabhan [32].

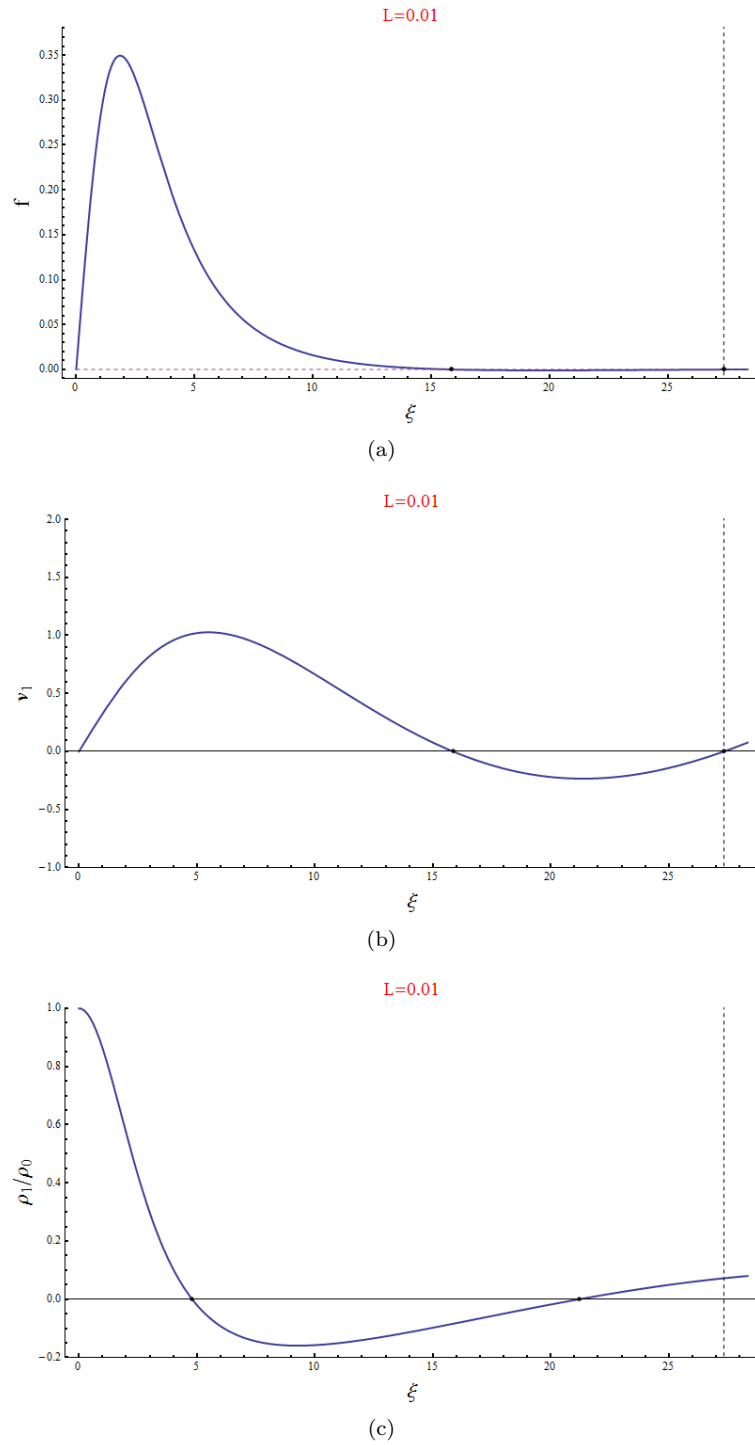


Figura 3.12: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = 0.01$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità.

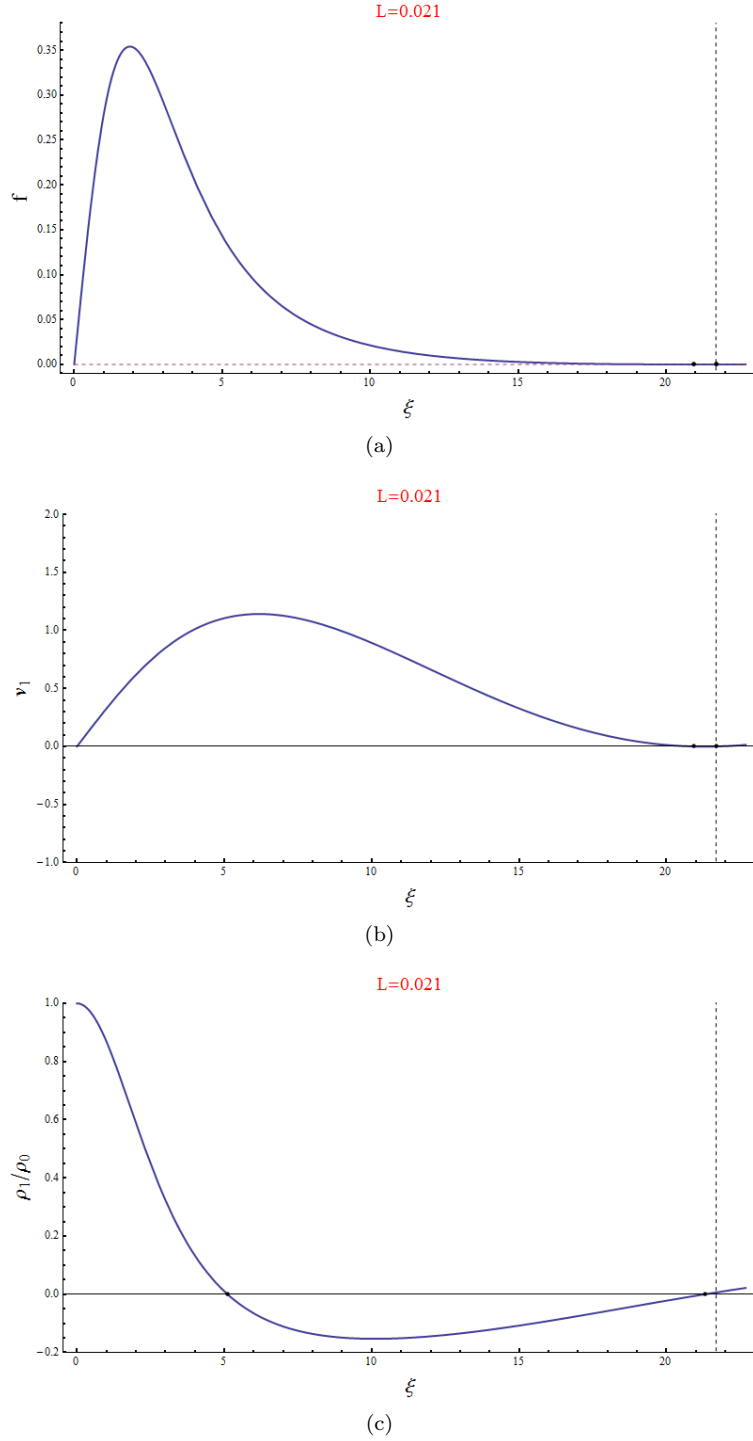


Figura 3.13: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = 0.021$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità. Si noti che la struttura nucleo-alone (definita nel testo) è molto poco pronunciata.

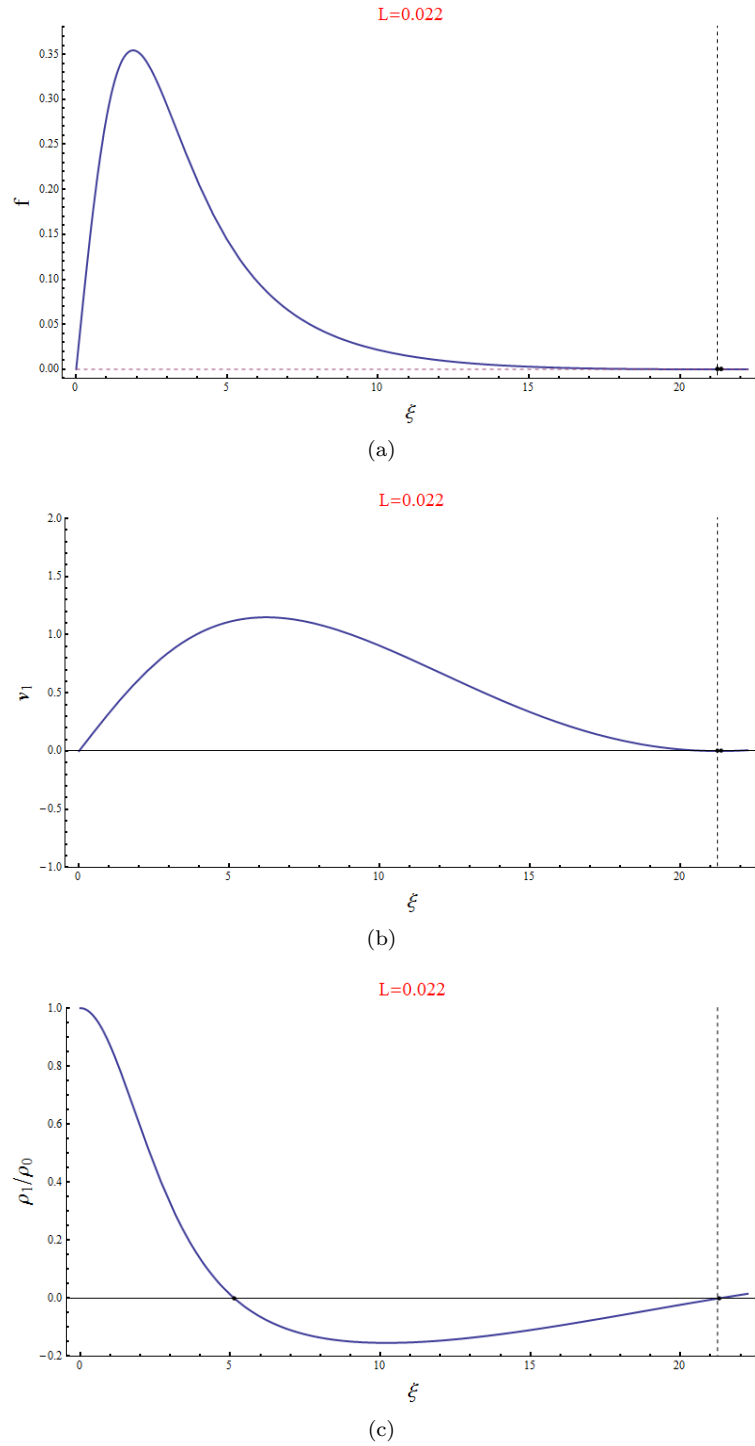


Figura 3.14: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = 0.022$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità. Si noti che la struttura nucleo alone (definita nel testo) è scomparsa.

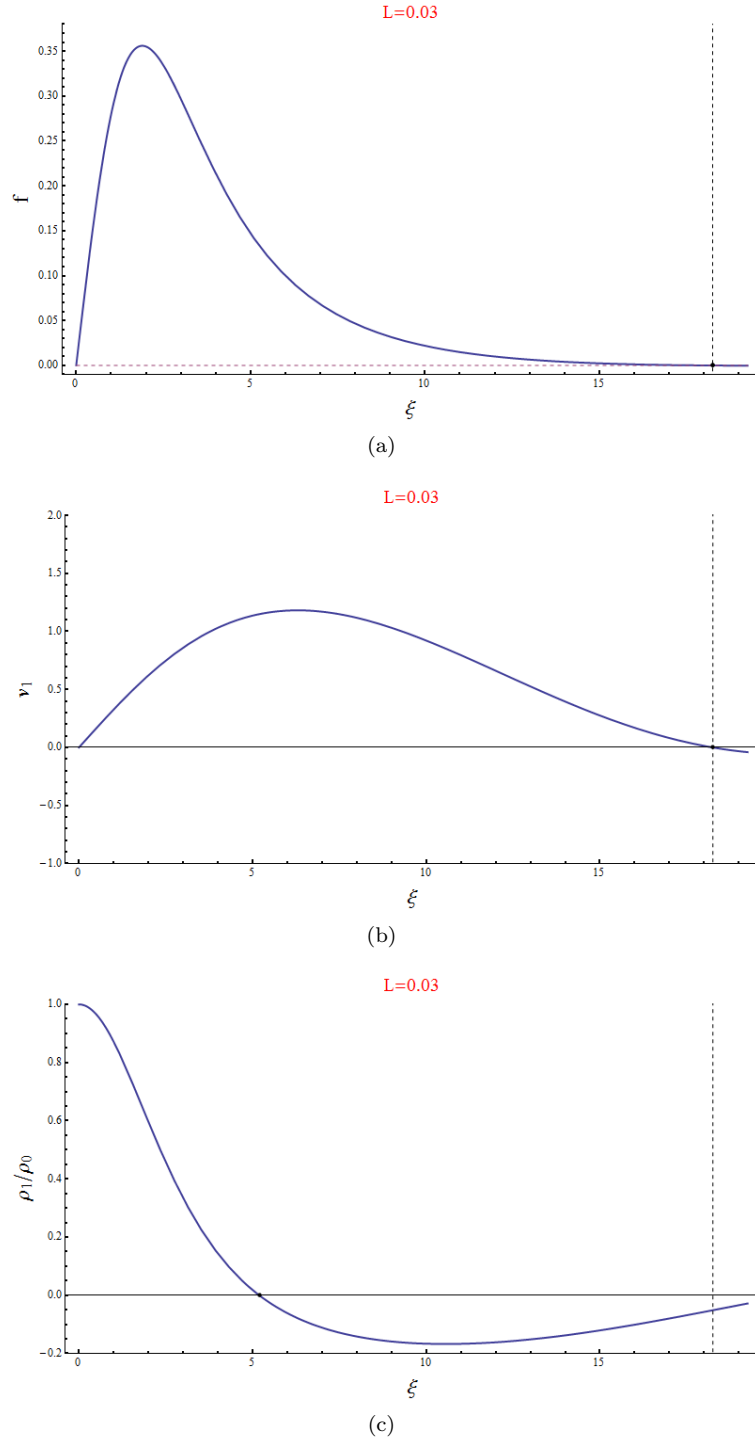


Figura 3.15: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = 0.03$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità.

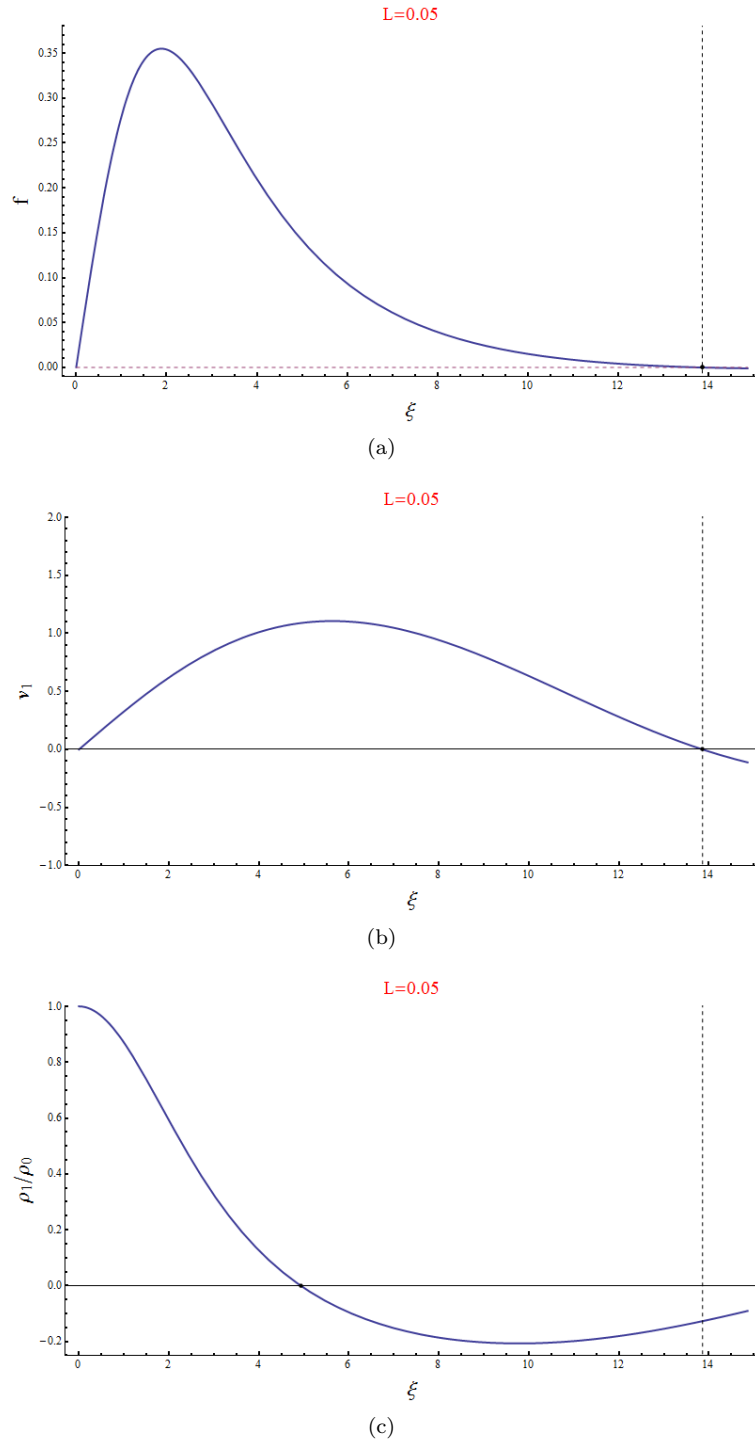


Figura 3.16: (a) Soluzione dell'equazione (3.51), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $E$  e  $V$  costanti, per  $L = -0.02$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale al valore tratteggiato in figura si ottiene una soluzione che rispetta le condizioni al contorno e i vincoli integrali riportati nel testo e dunque rappresenta un modo normale. In particolare il modo normale rappresentato è quello con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ . Sono segnati gli zeri. (b) Il relativo profilo di velocità (c) Profilo di densità.

### 3.3.2.3 Caso con Energia e Volume Costante con Termine Aggiuntivo nell'Energia

Abbiamo visto nella Sottosezione 3.3.2.2 che il collasso avviene per un valore di  $\Xi$  più alto quando si consideri un sistema a energia costante anziché a volume costante. Una possibile interpretazione è che se l'energia è tenuta costante, quando il gas comincia a comprimersi diminuisce l'energia gravitazionale e di conseguenza aumentano l'energia termica e la temperatura. Se la temperatura aumenta, la pressione al centro aumenta e la tendenza al collasso diminuisce.

Sugimoto e Bettwieser ([38]) hanno studiato l'evoluzione post-collasso in modelli gassosi, introducendo un termine di generazione di energia che tiene conto della generazione di energia dovuta alla formazione di sistemi stellari binari. Quando un sistema binario si forma, in seguito ad esempio ad un'interazione a tre corpi, avviene un rilascio di energia (vedi ad esempio [13]). Una trattazione di campo medio, come quella fin qui condotta, non tiene conto di questa generazione di energia: l'energia fornita dalle binarie deve essere introdotta tramite un termine *ad hoc*, e può essere considerata come *energia interna* del sistema, contrapposta all'*energia esterna*, dove quest'ultima è data dall'espressione (2.51) (a proposito di questa distinzione si veda ad esempio [13], cap. 28). I risultati di Sugimoto e Bettwieser e studi successivi (si veda [13] per ulteriori referenze) indicano che il collasso può essere fermato da questa generazione ulteriore di energia in regime non lineare, dando luogo alle oscillazioni gravotermiche descritte nel primo capitolo della Tesi. Tali autori utilizzarono un modello gassoso in cui assunsero, per tenere conto in maniera semplice degli effetti delle binarie, una generazione locale di energia  $\epsilon$  (energia prodotta per unità di tempo e di massa) proporzionale alla densità o al quadrato della densità:  $\epsilon = a\rho^p/\sigma$ , dove  $a$  è una costante,  $p = 1$  oppure  $p = 2$  e  $\sigma$  è la dispersione di velocità.

Nel nostro caso, studiamo un regime lineare in cui si calcola cosa succede su tempi non troppo lunghi. poiché la generazione di energia come introdotta da Sugimoto e Bettwieser introduce un tempo scala tipico, essa non può modificare i risultati su tempi scala molto più piccoli di quest'ultimo, e il sistema se studiato in regime lineare inizia a collassare esattamente come prima, per venire successivamente fermato in un regime non lineare.

Per vedere come la presenza di un'energia interna possa modificare o impedire il collasso, consideriamo in questa Sezione un modello idealizzato in cui l'energia totale del sistema ha un termine aggiuntivo rispetto alla (2.51). Tale termine aggiuntivo di energia viene considerato energia interna e dunque non esercita forze che possono andare ad alterare l'equilibrio idrostatico.

Notiamo innanzitutto che questa fonte aggiuntiva di energia non altera il collasso isoterma: nella derivazione dell'instabilità dinamica a  $T$  e  $V$  costanti non abbiamo mai utilizzato la particolare forma dell'energia. Il fatto che la generazione di energia possa frenare il collasso è infatti dovuta all'aumento di temperatura che riporta il sistema verso la stabilità, ma l'aumento di temperatura è proibito per definizione in un collasso isoterma.

Tra le richieste che chiediamo che debba soddisfare il termine aggiuntivo all'energia, la principale è che quando la densità aumenti venga rilasciata energia, in analogia con l'energia rilasciata per formazione di binarie. Il modello più semplice che possiamo pensare consiste in un termine di energia proporzionale alla densità centrale a una certa potenza, in modo che quando la densità centrale aumenti la temperatura salga. Consideriamo quindi un modello in cui l'energia totale è data da:

$$E = \frac{3}{2}NkT + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r})\Phi(\mathbf{r}) d^3r - v\sigma_0^2 R^3 \rho(0), \quad (3.61)$$

dove  $v$  è una costante adimensionale,  $\sigma_0^2 = kT_0/m$  è la dispersione di velocità,  $R$  è il raggio del sistema. Così l'energia totale immagazzinata è proporzionale a  $\rho(0)R^3$ . Per dare un'idea di quanto sia questa massa, osserviamo che è senz'altro valida la disuguaglianza  $4\pi\rho(R)R^3/3 < M < 4\pi\rho(0)R^3/3$ , dove  $M$  è la massa totale. Il rapporto tra la densità centrale e quella al bordo,  $\rho(0)/\rho(R)$ , è mostrato nella figura 2.5 e vale ad esempio circa 709 nel punto in cui si



innesca la catastrofe gravotermica. Se  $v > 0$  il sistema contraendosi si scalda, se  $v < 0$  il sistema contraendosi si raffredda. Per una variazione a  $E$  costante abbiamo in questo caso che la variazione di temperatura in funzione della variazione di densità è data da:

$$\frac{T_1}{T_0} = -\frac{\int \rho_1(r) \psi(r) d^3r}{\frac{3}{2}Nm} + \frac{v\sigma_0^2 R^3 \rho_1(0)}{\frac{3}{2}NkT_0} \quad (3.62)$$

Sostituendo nell'equazione (3.29) otteniamo la seguente, che è uguale alla (3.51) con un termine in più:

$$Lf = \mathcal{L}f + \psi' e^{-\psi} \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) f(\xi) d\xi + \psi' e^{-\psi} \frac{v}{2\pi} \frac{\Xi f'(0)}{\psi'(\Xi)} \quad (3.63)$$

dove sono stati utilizzati, oltre agli stessi strumenti utilizzati per giungere alla (3.51), anche  $R = [\tau_0/\rho_c]^{3/2} \Xi^3$ , la formula (3.27) e la seguente identità:

$$f'(0) + 2 \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{f(\xi)}{\xi} = 3f'(0). \quad (3.64)$$

Per la stabilità marginale l'equazione (3.63) è:

$$\mathcal{L}f = -A\psi' e^{-\psi} \quad (3.65)$$

dove  $A = \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) f(\xi) d\xi + \frac{v}{2\pi} \frac{\Xi f'(0)}{\psi'(\Xi)}$ . Analogamente a quanto fatto per il caso  $E$  e  $V$  costanti, cerchiamo una soluzione dell'equazione della forma

$$f = a\psi' + b\xi e^{-\psi}, \quad (3.66)$$

con  $a$  e  $b$  costanti. Sostituendo la (3.66) nella (3.63) otteniamo la prima condizione su  $a$  e  $b$ :

$$a + b = A. \quad (3.67)$$

Calcoliamo la derivata prima di  $f$  dalla (3.66):

$$f' = a\psi'' + be^{-\psi} - b\xi\psi' e^{-\psi}, \quad (3.68)$$

Da<sup>11</sup>  $\psi''(0) = 1/3$  e  $\psi(0) = 0$  si ha:

$$f'(0) = \frac{a}{3} + b \quad (3.69)$$

Sostituendo quest'ultima in  $A$  e dividendo per  $b$  otteniamo:

$$\frac{a}{b} + 1 = \frac{1}{\frac{3}{2}\Xi^2 \psi'(\Xi)} \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) \left( \frac{a}{b} \psi'(\xi) + \xi e^{-\psi(\xi)} \right) d\xi + \frac{v}{2\pi} \frac{\Xi}{\psi'(\Xi)} \left( \frac{1}{3} \frac{a}{b} + 1 \right) \quad (3.70)$$

Abbiamo poi una seconda condizione su  $a/b$  dal fatto che  $f(\Xi) = 0$ :

$$\frac{a}{b} \psi'(\Xi) + \Xi e^{-\psi(\Xi)} = 0. \quad (3.71)$$

Sostituendo  $a/b$  dall'ultima equazione nella precedente otteniamo

$$\boxed{\frac{3}{2}\Xi^2 \left( \psi'(\Xi) - \Xi e^{-\psi(\Xi)} \right) - \frac{3}{2} \frac{v}{2\pi} \Xi^3 \left( 1 - \frac{1}{3} \frac{\Xi e^{-\psi(\Xi)}}{\psi'(\Xi)} \right) = \int_0^\Xi \xi^2 \psi'(\xi) \left( \xi e^{-\psi(\xi)} - \psi'(\xi) \frac{\Xi e^{-\psi(\Xi)}}{\psi'(\Xi)} \right) d\xi} \quad (3.72)$$

<sup>11</sup>Si può facilmente dimostrare a partire dall'equazione di Emden e assumendo che  $\psi$  sia una serie di potenze, in cui i primi due termini sono nulli poiché  $\psi(0) = \psi'(0) = 0$ , che per piccoli  $\xi$ ,  $\psi(\xi) \simeq \xi^2/6$ . Si veda ad esempio [9].

I valori di  $\Xi$  che soddisfano quest'ultima uguaglianza sono quelli per cui l'equazione (3.63) ammette soluzione per la situazione di stabilità marginale.

I risultati sono i seguenti (si veda la figura 3.17): per  $v = 0$  il termine aggiuntivo scompare e ovviamente ritroviamo gli stessi risultati della Sottosezione 3.3.2.2, l'instabilità si manifesta a  $\Xi = 34.36$ . Per  $v > 0$  una contrazione fa aumentare la temperatura e l'instabilità si manifesta per  $\Xi > 34.36$ , finché per  $v > 0.00008$  non esistono più soluzioni dell'equazione (3.72) (questo si può vedere anche dall'andamento asintotico dei due membri). Per  $v < 0$ , caso in cui una contrazione fa diminuire la temperatura, l'instabilità si manifesta per  $\Xi < 34.36$  e l'equazione 3.72 ha sempre soluzione (per  $v \rightarrow -\infty$  il punto a cui si instaura l'instabilità tende a zero).

Possiamo interpretare i risultati come un'indicazione che un aumento di temperatura può rendere più stabile il sistema, fino a impedire del tutto il collasso. In quest'ottica la catastrofe gravotermica non risulta qualitativamente diversa dal collasso isoterma: l'unica differenza tra i due è che nel primo il collasso è ritardato da un aumento di temperatura, che però non è sufficiente a fermare il collasso.

Per un confronto con i risultati di Sugimoto e Bettwieser (il confronto ovviamente non va inteso come un confronto quantitativo in senso stretto, ma solo come indicativo sugli ordini di grandezza) si può considerare, per ciascuno dei due modelli, l'importanza relativa tra l'energia liberata dal termine aggiuntivo e l'energia liberata sotto forma di energia gravitazionale durante il collasso.

Per il modello fluido qui considerato, si può fare il rapporto tra l'energia gravitazionale trasformata in energia termica e l'energia che liberata dal termine aggiuntivo, utilizzando come profili di densità per calcolare le energie rilasciate quelli che innescano il collasso nel caso senza termine aggiuntivo, e come valore del parametro  $v$  quello limite pari a  $v = 0.0008$ . Ciò dovrebbe fornire un'indicazione sull'importanza relativa del contributo gravitazionale e del contributo aggiuntivo all'energia necessario a fermare il collasso. In formule il discorso si traduce nella seguente quantità:

$$e \equiv -\frac{kT_0 \int \rho_1(r) \psi(r) d^3r}{mv\sigma_0^2 R^3 \rho_1(0)} = -\frac{\int \rho_1(r) \psi(r) d^3r}{vR^3 \rho_1(0)}, \quad (3.73)$$

dove, come specificato, i profili di densità da usare sono quelli che instaurano l'instabilità nel caso marginale senza generazione di energia, figura 3.11, e  $v = 0.00008$ .

Una quantità confrontabile con  $e$  per il modello di Sugimoto e Bettwieser potrebbe essere l'energia rilasciata come energia gravitazionale al primo picco della densità centrale (quando il collasso si ferma per la prima volta) divisa per l'energia totale rilasciata fino a quel momento dal termine di generazione di energia  $\epsilon$ .

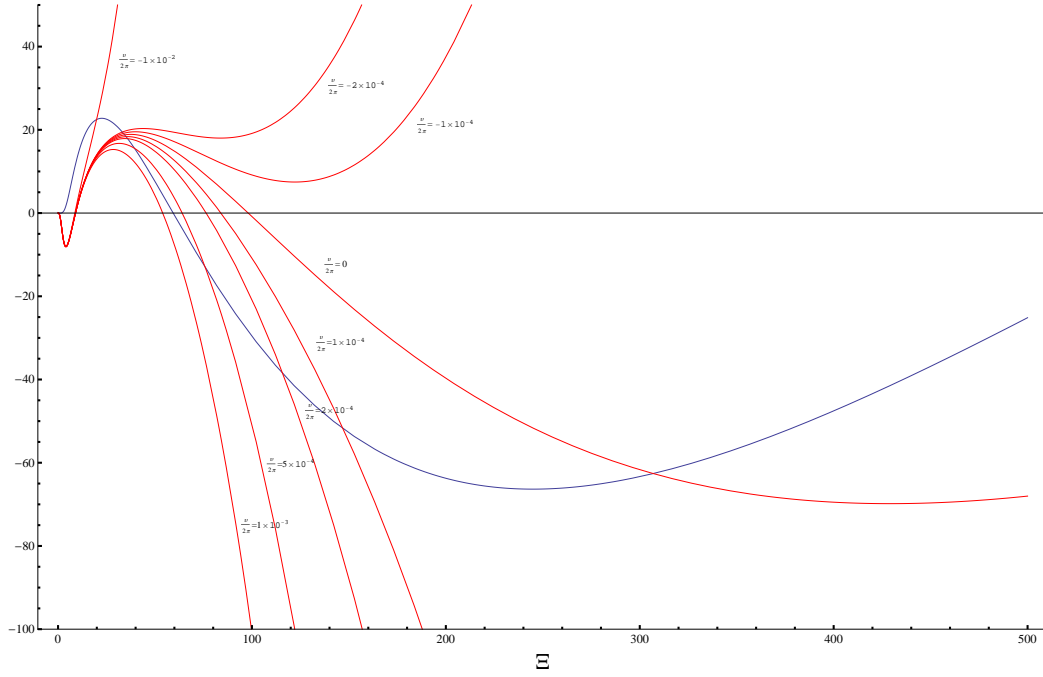


Figura 3.17: Soluzione grafica dell'equazione algebrica (3.72). Se tale equazione ammette soluzione, allora è presente un modo con  $L = 0$  e quindi si può innescare l'instabilità, se invece non ammette soluzione il collasso è inibito. In blu è mostrato il membro destro dell'equazione (3.72), in rosso il membro sinistro per diversi valori di  $v/2\pi$ , che è il parametro che caratterizza l'importanza del termine aggiuntivo nell'energia. Per  $v = 0$  si ottiene la soluzione senza generazione di energia (la catastrofe avviene per  $\Xi = 34.36$ ). Per  $v < 0$ , cioè quando comprimendosi il fluido assorbe energia diminuendo la temperatura, la prima soluzione si trova per  $\Xi$  minori che nel caso senza termine aggiuntivo nell'energia ( $v = 0$ ), e la catastrofe viene quindi anticipata. Per  $v > 0$ , cioè quando il fluido comprimendosi si riscalda, la catastrofe viene ritardata (cioè si innescava per  $\Xi$  più grandi) per piccoli valori di  $v$  e non può più verificarsi per  $v/2\pi > 0.00008$ .

### 3.3.3 Versione Lagrangiana

In questa Sezione riprendiamo le equazioni della fluidodinamica nella cosiddetta versione Lagrangiana: in questa versione sarà più semplice imporre la condizione al bordo di pressione costante. Le variabili indipendenti sono il raggio  $\mathbf{r}_0$  a cui l'elemento di fluido si trovava al tempo  $t = 0$  e il tempo  $t$ , dunque anche il raggio attuale di un certo elemento di fluido, non essendo più la variabile indipendente, è funzione di  $\mathbf{r}_0$  e  $t$ :

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{r}_0, t).$$

La condizione al bordo di pressione costante si può implementare facilmente imponendo che la perturbazione di densità sia nulla per un certo  $r_0$ : seguendo un tale elemento di fluido la densità non varia, e dunque nemmeno la pressione. Scriviamo dunque le equazioni di Eulero e di continuità e facciamo il cambio dalle vecchie variabili indipendenti  $r, t$  alle nuove  $r_0, t$ . L'equazione di continuità e l'equazione di Eulero, già avendo utilizzato l'equazione di stato dei gas perfetti e trascurando il termine quadratico nelle velocità e assumendo simmetria sferica<sup>12</sup> sono, in versione Euleriana:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho v) &= 0 && \text{Equazione di continuità, tutto funzione di } r, t \\ \partial_t v &= -\frac{\partial_r \rho}{\rho} \frac{kT}{m} - \frac{GM}{r^2} && \text{Equazione di Eulero, tutto funzione di } r, t \end{aligned} \quad (3.74)$$

Ora bisogna eseguire il seguente cambio di variabili indipendenti:

$$\begin{cases} r \rightarrow r_0(r, t) \\ t \rightarrow t \end{cases} \quad (3.75)$$

Le regole per cambiare le derivate di una generica funzione  $f$  sono le seguenti:

$$\begin{cases} \frac{\partial f(r, t)}{\partial r} = \frac{\partial r_0(r, t)}{\partial r} \frac{\partial f(r_0, t)}{\partial r_0} \\ \frac{\partial f(r, t)}{\partial t} = \frac{\partial r_0(r, t)}{\partial t} \frac{\partial f(r_0, t)}{\partial r_0} + \frac{\partial f(r_0, t)}{\partial t} \end{cases} \quad (3.76)$$

Le derivate parziali di  $r_0$  si ottengono dalla seguente relazione, che esprime il fatto che la massa contenuta a raggi minori di certo elementino di fluido è sempre la stessa al variare del tempo (che significa che diversi gusci di fluido non si “scavalcano”):

$$\int_0^{r_0(r, t)} \rho_0(s) 4\pi s^2 ds = \int_0^r \rho(s, t) 4\pi s^2 ds \quad (3.77)$$

Eseguendo la derivata parziale rispetto a  $r$  di ambo i membri, considerati funzioni di  $r, t$ , abbiamo:

$$r_0^2 \rho_0(r_0) \partial_r r_0(r, t) = r^2 \rho(r, t) \quad (3.78)$$

Mentre eseguendo la derivata parziale rispetto a  $t$  otteniamo:

$$r_0^2 \rho_0(r_0) \partial_t r_0(r, t) = \int_0^r s^2 \partial_t \rho(s, t) ds \quad (3.79)$$

Usando l'equazione di continuità (3.74) la (3.79) diventa:

$$r_0^2 \rho_0(r_0) \partial_t r_0(r, t) = -r^2 \rho(r, t) v(r, t) \quad (3.80)$$

Ricavando le derivate parziali di  $r_0(r, t)$  dalla (3.80) e (3.78) e utilizzando le regole (3.76) otteniamo così le equazioni della fluidodinamica in versione Lagrangiana, in cui ciascuna quantità è da considerarsi funzione di  $r_0$  e  $t$ :

$$\begin{aligned} (\partial_t - \frac{r^2 \rho}{r_0^2 \rho_0} v \partial_{r_0}) \rho + \frac{1}{r^2} \frac{r^2 \rho}{r_0^2 \rho_0} \partial_{r_0} (r^2 \rho v) &= 0 && \text{Equazione di continuità, versione Lagrangiana} \\ (\partial_t - \frac{r^2 \rho}{r_0^2 \rho_0} v \partial_{r_0}) v &= -\frac{r^2 \rho}{r_0^2 \rho_0} \frac{\partial_{r_0} \rho}{\rho} \frac{kT}{m} - \frac{GM}{r^2} && \text{Equazione di Eulero, versione Lagrangiana} \end{aligned} \quad (3.81)$$

<sup>12</sup>la velocità indica quindi la componente radiale della velocità.

Ora vogliamo approssimare queste equazioni al primo ordine attorno alla situazione di equilibrio, similmente a quanto fatto nella versione Euleriana. Sostituendo le seguenti:

$$\begin{aligned}\rho(r_0, t) &= \rho_0(r_0) + \rho_1(r_0, t) \\ v(r_0, t) &= v_1(r_0, t) \\ r(r_0, t) &= r_0 + r_1(r_0, t) \\ T(t) &= T_0 + T_1(t)\end{aligned}\tag{3.82}$$

Osservando che  $M(r_0, t) = M(r_0, t = 0)$ , approssimando al primo ordine nelle quantità col pedice 1 e annullando i termini di ordine zero (che devono semplificarsi grazie alla condizione di equilibrio idrostatico) otteniamo:

$$\begin{aligned}\partial_t \rho_1 + \frac{\rho_0}{r_0^2} \partial_{r_0} (r_0^2 v_1) &= 0 && \text{Equazione di continuità} \\ \partial_t v_1 &= -\frac{kT_0}{m} \frac{\partial_{r_0} \rho_0}{\rho_0} \left( 2 \frac{r_1}{r_0} + \frac{\partial_{r_0} \rho_1}{\partial_{r_0} \rho_0} + \frac{T_1}{T_0} \right) + 2 \frac{GM}{r_0^3} r_1 && \text{Equazione di Eulero}\end{aligned}\tag{3.83}$$

Dalle usuali regoli di derivazione otteniamo che:

$$\frac{\partial r(r_0, t)}{\partial t} = -\frac{\frac{\partial r_0(r, t)}{\partial t}}{\frac{\partial r_0(r, t)}{\partial r}}\tag{3.84}$$

Usando le equazioni (3.80) e (3.78) per sostituire le derivate parziali di  $r_0$  otteniamo:

$$\partial_t r_1 = v_1\tag{3.85}$$

Vogliamo ora risolvere il sistema di equazioni differenziali costituito dalle tre equazioni (3.83), (3.85). Lavoriamo in trasformata di Fourier rispetto al tempo; lo scopo è ricavare un'equazione che coinvolga solo l'incognita  $\rho_1$ .

Assumiamo dunque le seguenti dipendenze:

$$\begin{aligned}\rho_1(r_0, t) &= \rho_1(r_0) e^{-i\omega t} \\ v_1(r_0, t) &= v_1(r_0) e^{-i\omega t} \\ r_1(r_0, t) &= r_1(r_0) e^{-i\omega t}\end{aligned}\tag{3.86}$$

Sostituiamo ora l'ultima delle (3.86) nella (3.85), ricaviamone  $r_1$  e sostituiamolo nella seconda delle (3.83); poi ricaviamo  $v_1$  da quest'ultima e sostituiamolo nella prima delle (3.83) per ottenere la seguente (si è usato anche l'equilibrio idrostatico per sostituire  $\frac{\partial_{r_0} \rho_0}{\rho_0} \frac{kT_0}{m} = -\frac{GM}{r_0^2}$ ):

$$-\rho_1 + \frac{\rho_0}{r_0^2} \partial_{r_0} \left[ \frac{GM \left( \frac{\partial_{r_0} \rho_1}{\partial_{r_0} \rho_0} + \frac{T_1}{T_0} \right)}{4 \frac{GM}{r_0^3} + \omega^2} \right] = 0\tag{3.87}$$

A questo punto introduciamo la variabili adimensionali  $\xi_0$  definita dalla solita relazione  $r_0 = [\tau/\rho_c]^{1/2} \xi_0$  dove  $\tau = kT_0/4\pi Gm$ ; utilizzando anche la (2.69) e  $\rho = \rho_c e^{-\psi(\xi_0)}$  la (3.87) diventa:

$$\left[ -\frac{\rho_1}{\rho_c} + \frac{e^{-\psi}}{\xi_0^2} \frac{d}{d\xi_0} \left[ \frac{\left( \frac{\frac{d}{d\xi_0} \left( \frac{\rho_1}{\rho_c} \right)}{\frac{d}{d\xi_0} e^{-\psi(\xi_0)}} + \frac{T_1}{T_0} \right)}{\frac{4}{\xi_0^3} + \frac{L}{\xi_0^2 \psi'(\xi_0)}} \right] \right] = 0\tag{3.88}$$

Dove, con la stessa definizione che nella versione Euleriana,

$$L = \frac{\omega^2}{4\pi G \rho_c}.\tag{3.89}$$

Condizioni al contorno generali che dovranno essere soddisfatte dalle soluzioni per quanto riguarda il centro deriveranno dalla richiesta  $r_1(0) = 0$ , che segue dal fatto che la simmetria sferica richiede che il punto al centro rimanga al centro (dalle (3.83) e (3.85) abbiamo come conseguenza  $v_1(0) = 0$ ), e dalla richiesta che, in analogia con il caso Euleriano, la derivata della velocità al centro sia non nulla,  $v_1'(0) \neq 0$ . Queste condizioni si traducono in condizioni al contorno per  $\rho_1$  al centro. Nella prossima Sezione discuteremo più in dettaglio come imporre la condizione di pressione costante al bordo.

### 3.3.4 Caso Temperatura e Pressione Costanti (Instabilità Isobara di Ebert e Bonnor)

In questo caso  $T_1 = 0$  e l'equazione (3.88) diventa:

$$-\frac{\rho_1}{\rho_c} + \frac{e^{-\psi(\xi_0)}}{\xi_0^2} \frac{d}{d\xi_0} \left[ \frac{\frac{\frac{d}{d\xi_0}(\frac{\rho_1}{\rho_c})}{\frac{d}{d\xi_0}e^{-\psi(\xi_0)}}}{\frac{4}{\xi_0^3} + \frac{L}{\xi_0^2\psi'(\xi_0)}} \right] = 0 \quad (3.90)$$

Le condizioni al contorno sono le seguenti: la condizione  $v_1(0) = 0$  si traduce nella condizione  $\rho'_1(0) = 0$  grazie all'equazione di Eulero. La condizione di pressione richiede che la pressione per un certo guscio di fluido fissato sia costante (seguendo il guscio di fluido: la sua posizione spaziale può variare nel tempo), ma poiché si assume equazione di stato di un gas perfetto isoterma, tale richiesta si traduce in una richiesta di densità costante. Le condizioni al contorno sono dunque le seguenti:

$$\begin{aligned} \rho_1(0) &= 0 \\ \rho_1(\Xi) &= 0 \end{aligned} \quad (3.91)$$

Per risolvere numericamente l'equazione (3.90) si procede in modo analogo al caso  $T$  e  $V$  costante: si fissa un valore di  $L$  e si risolve l'equazione con le condizioni al contorno

$$\begin{aligned} \rho_1(0) &= 0 \\ \rho'_1(0) &\neq 0. \end{aligned} \quad (3.92)$$

La seconda condizione deriva dal fatto che la condizione  $v'_1(0) \neq 0$  si traduce in  $\rho'_1(0) \neq 0$  grazie all'equazione di continuità. Il valore preciso di  $\rho'(0)$  è irrilevante data la linearità dell'equazione che stiamo studiando. Nella soluzione trovata si cercano gli zeri: identificando  $\Xi$  con questi ultimi avremo trovato soluzioni che soddisfano le condizioni (3.91), con  $L$  quello fissato inizialmente. Variando  $L$  si trovano tutte le soluzioni dell'equazione.

I risultati sono mostrati nelle figure 3.19 che rappresentano i profili di densità di alcuni modi di minimo  $L$  fissato  $\Xi$ , e nella figura 3.18 che rappresenta l'autovalore minimo in funzione del raggio adimensionale del sistema  $\Xi$ .

L'analisi svolta in questa Sottosezione è probabilmente generalizzabile a casi di simmetria non sferica (per un'analisi degli stati di equilibrio a simmetria non sferica, si veda [27]).

#### Soluzione Analitica Per $L=0$ (Stabilità Marginale)

L'equazione (3.90) per  $L = 0$  può essere riscritta nel seguente modo:

$$\mathcal{L}\left(\frac{\rho_1}{\rho_c}\right) = 0 \quad (3.93)$$

Dove  $\mathcal{L}$  è l'operatore così definito

$$\mathcal{L} \equiv -1 + \frac{e^{-\psi}}{\xi_0^2} \frac{d}{d\xi_0} \left[ \frac{\frac{\frac{d}{d\xi_0}}{\frac{d}{d\xi_0}e^{-\psi}}}{\frac{4}{\xi_0^3}} \right] = 0 \quad (3.94)$$

Si verifica facilmente utilizzando l'equazione di Emden (2.66) che l'operatore  $\mathcal{L}$  soddisfa le seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\psi'^2) &= -\frac{e^{-\psi}}{2} \\ \mathcal{L}(e^{-\psi}) &= -\frac{e^{-\psi}}{4} \end{aligned} \quad (3.95)$$

Quindi una soluzione dell'equazione (3.94) è la seguente

$$\frac{\rho_1}{\rho_0} = 2e^{-\psi} - \psi'^2 \quad (3.96)$$

Questa soluzione soddisfa le condizioni al contorno  $\rho_1(0) = 2$  e  $\rho_1'(0) = 0$ , come richiesto. Cercando gli zeri di questa funzione si ottengono i modi normali per la situazione di stabilità marginale.

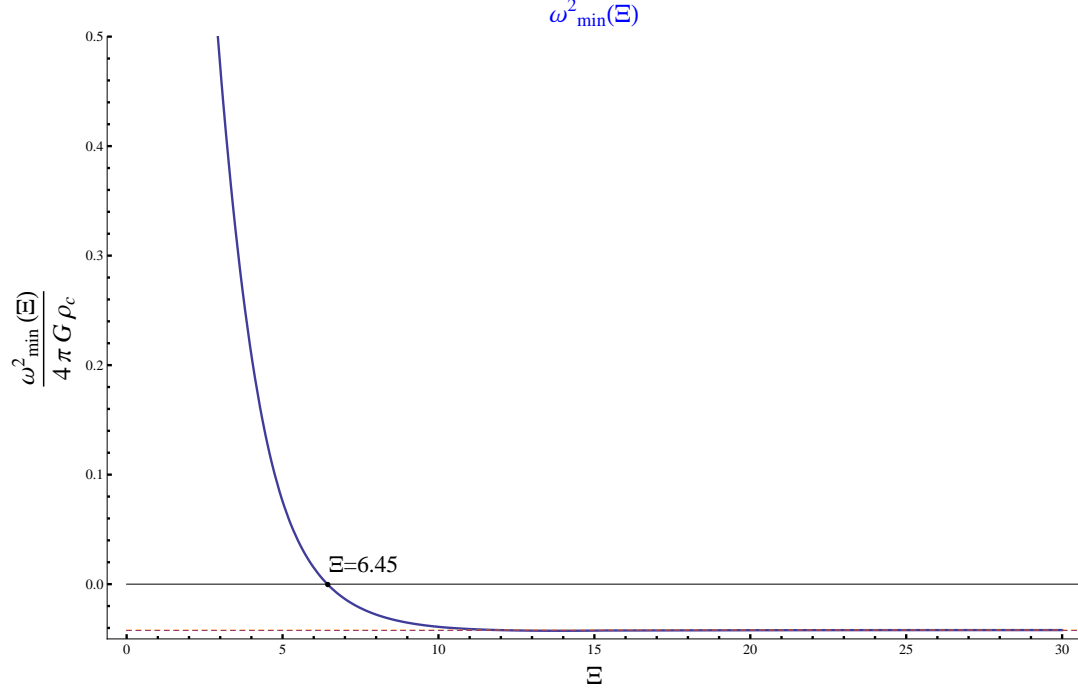


Figura 3.18: L'autovalore minimo dell'equazione (3.90), che se risolta permette di trovare i modi normali per il caso con  $T$  e  $P$  costanti, in funzione del raggio adimensionale  $\Xi$ . Si vede che è minore di zero, indicando che esistono stati instabili, per  $\Xi > 6.45$ , valore che corrisponde allo stato che sta alla sommità dell'isoterma in figura 2.2(a). Il grafico permette di valutare i tempi scala su cui avviene il collasso, almeno nella fase in cui il regime lineare è valido. Si noti che la frequenza minima raggiungibile (per  $\Xi \rightarrow \infty$ ) è la stessa che nel caso del collasso isoterma (figura 3.2) e della catastrofe gravotermica (figura 3.7), ma contrariamente a questi ultimi due casi il valore asintotico  $L = -0.042$  è raggiunto dal basso, e c'è un minimo a circa  $\Xi \simeq 15$  che vale approssimativamente  $L = -0.043$ .

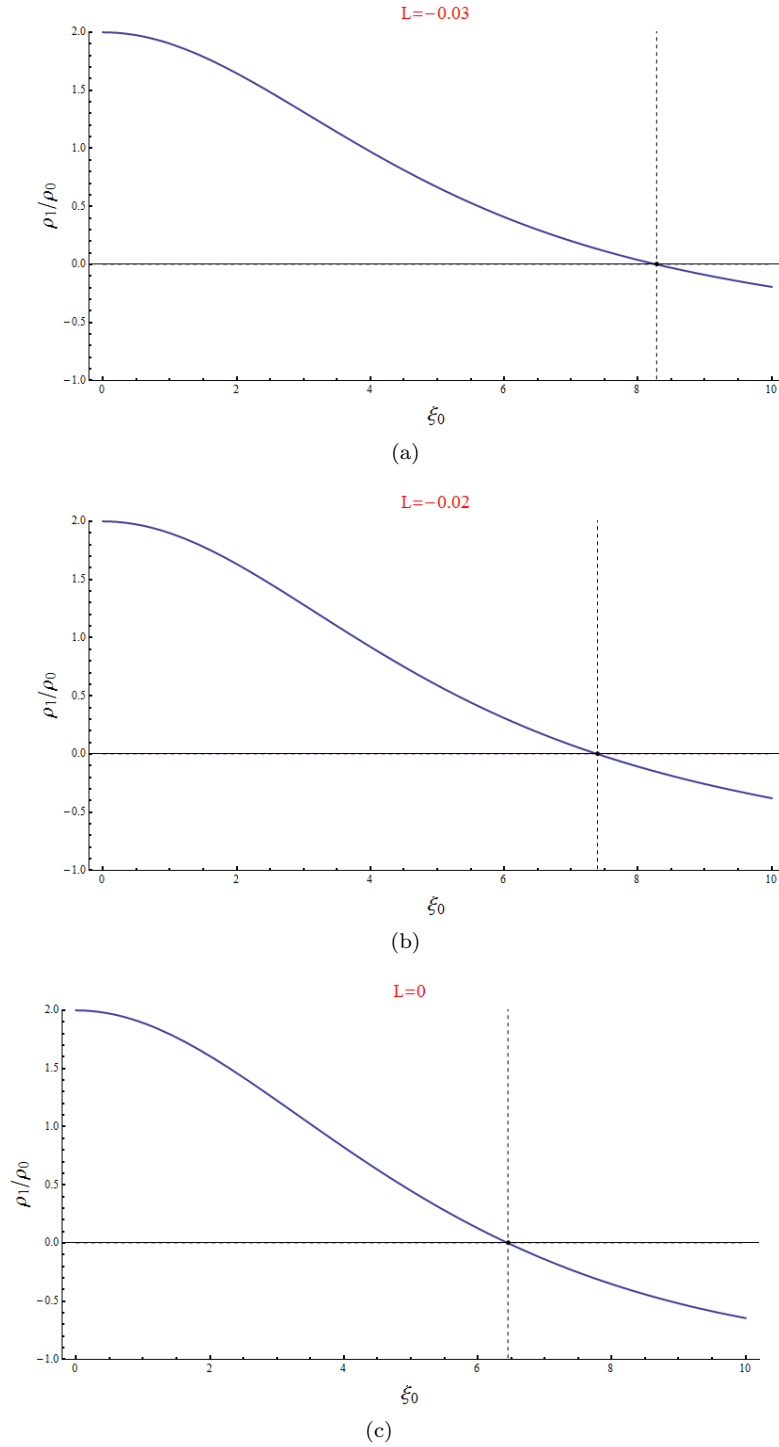


Figura 3.19: Soluzioni dell'equazione (3.90), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $T$  e  $P$  costanti, per diversi valori di  $L$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale agli zeri si ottengono soluzioni che rispettano le corrette condizioni al contorno (3.91) e dunque rappresentano un modo normale. In particolare la linea tratteggiata indica il modo normale con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ .



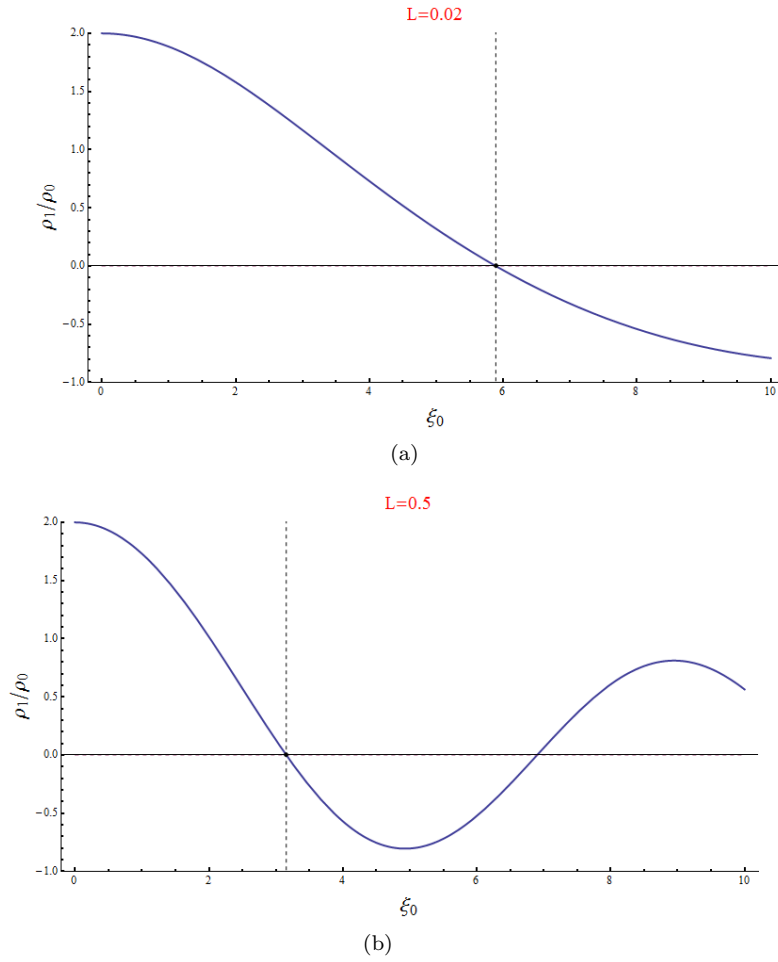


Figura 3.20: Soluzioni dell'equazione (3.90), che è quella che consente di trovare i modi normali del sistema nel caso  $T$  e  $P$  costanti, per diversi valori di  $L$ . Ponendo  $\Xi$  (il raggio adimensionale del sistema) uguale agli zeri si ottengono soluzioni che rispettano le corrette condizioni al contorno (3.91) e dunque rappresentano un modo normale. In particolare la linea tratteggiata indica il modo normale con  $L$  minimo per un fissato  $\Xi$ .

### 3.4 Analisi della Stabilità nel Caso a Due Componenti

#### 3.4.1 Introduzione

In questa Sezione vogliamo accennare a un'analisi della stabilità per il caso a due componenti. Come prima cosa, mostriamo che l'equivalenza tra l'instaurarsi dell'instabilità dinamica e termodinamica vale anche nel caso a due componenti. Per fare questo consideriamo però solo il caso a temperatura e volume costanti, che dalle discussioni precedenti si è rivelato il più semplice. Ricordiamo che il punto in cui si innesca l'instabilità a temperatura e volume costanti è anche il punto in cui il calore specifico diventa negativo. Mostreremo alcune figure che rappresentano i profili di densità e di velocità che innescano l'instabilità (figura 3.21). Per concludere la Sezione, prendendo spunto dal lavoro di Lightman ([23]) e dal lavoro di Yoshizawa ([43]), studieremo l'andamento dei punti a cui si innesca l'instabilità per i quattro tipi di condizioni al contorno studiate nella Sezione 3.2.2 (a ciascun tipo di condizione al contorno è associato un potenziale termodinamico) al variare dei parametri  $M_B/M_A$  e  $\beta \equiv m_B/m_A$  (figura 3.25).

#### 3.4.2 Instabilità Termodinamica

Studiamo l'instabilità termodinamica per il sistema a due componenti, con i vincoli di temperatura e volume costanti. Il potenziale termodinamico associato a queste condizioni esterne è l'energia libera di Helmholtz, formula (2.63). Appliciamo il metodo descritto nella Sezione 3.2.1. Si tratta di un'estensione dell'analisi di Chavanis [7] al caso di due componenti.

Utilizzando le formule (2.51) e (2.61) scriviamo l'energia libera di Helmholtz per un gas con distribuzione di velocità localmente Maxwelliana e distribuzione di densità arbitraria:

$$\mathcal{F} = E - TS_b \quad (3.97)$$

$$= \frac{3}{2}N_A kT + \frac{3}{2}N_B kT + \frac{1}{2} \int \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r}) d^3r \quad (3.98)$$

$$+ kT \left[ \frac{M_A}{m_A} \left( \frac{3}{2} - \log \left( \frac{m_A^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) + \frac{M_B}{m_B} \left( \frac{3}{2} - \log \left( \frac{m_B^{\frac{1}{2}}}{(2\pi kT)^{\frac{3}{2}}} \right) \right) \right] \quad (3.99)$$

$$- kT \left[ \frac{1}{m_A} \int \rho_A \log \rho_A d^3r + \frac{1}{m_B} \int \rho_B \log \rho_B d^3r \right] \quad (3.100)$$

Questa espressione, fissate  $T$ ,  $N_A$ ,  $N_B$ ,  $m_A$ ,  $m_B$  e  $V$  è un funzionale delle due funzioni  $\rho_A$  e  $\rho_B$ :

$$F = F[\rho_A, \rho_B]$$

Dobbiamo calcolare la variazione seconda di questo funzionale attorno ai profili di densità di equilibrio. Chiamiamo  $\rho_{1A}$  e  $\rho_{1B}$  le variazioni degli stati imperturbati  $\rho_{0A}$  e  $\rho_{0B}$ , e supponiamo che si mantenga la simmetria sferica. La condizione che la massa totale di ciascuna componente rimanga costante si traduce nei seguenti vincoli:

$$\begin{aligned} \int \rho_{1A} d^3r &= 0, \\ \int \rho_{1B} d^3r &= 0. \end{aligned} \quad (3.101)$$

La variazione prima di  $\mathcal{F}$  è nulla in quanto è la condizione che definisce gli stati di equilibrio. Al secondo ordine otteniamo, svolgendo il calcolo:

$$\mathcal{F}[\rho_{0A} + \rho_{1A}, \rho_{0B} + \rho_{1B}] - \mathcal{F}[\rho_{0A}, \rho_{0B}] \equiv \delta^2 \mathcal{F} = -\frac{k}{2} \int \frac{\rho_{1A}^2}{m_A \rho_{0A}} d^3r - \frac{k}{2} \int \frac{\rho_{1B}^2}{m_B \rho_{0B}} d^3r - \int \frac{(\rho_{1A} + \rho_{1B})}{2T} \Phi_1 d^3r \quad (3.102)$$

dove  $\Phi_1$  è la variazione di  $\Phi$ , cioè:

$$\Phi_1(r) = -G \int \frac{(\rho_{1A}(r') + \rho_{1B}(r'))}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} d^3r'. \quad (3.103)$$

Introduciamo ora le seguenti variabili, che rappresentano le variazioni di massa totale all'interno del raggio  $r$ :

$$\begin{aligned} M_{1A}(r) &\equiv \int_0^r \rho_{1A}(r') 4\pi r'^2 dr' \\ M_{1B}(r) &\equiv \int_0^r \rho_{1B}(r') 4\pi r'^2 dr' \end{aligned} \quad (3.104)$$

Ovviamente la massa contenuta fino al raggio zero deve valere zero, e la massa contenuta in tutta la sfera è mantenuta costante, dunque:

$$\begin{aligned} M_{1A}(0) &= M_{1B}(0) = 0 \\ M_{1A}(R) &= M_{1B}(R) = 0 \end{aligned} \quad (3.105)$$

La variazione seconda di  $\mathcal{F}$  può essere riscritta in termini di queste nuove variabili nel seguente modo, integrando per parti utilizzando le condizioni (3.105) e utilizzando la relazione  $d\Phi_1(r)/dr = G(M_{1B} + M_{1A})/r^2$ :

$$\delta^2 \mathcal{F} = \int (M_{1A} \quad M_{1B}) \begin{bmatrix} \frac{G}{2Tr^2} + \frac{k}{m_A} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{8\pi\rho_{0A} r^2} \frac{d}{dr} \right) & \frac{G}{2Tr^2} \\ \frac{G}{2Tr^2} & \frac{G}{2Tr^2} + \frac{k}{m_B} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{8\pi\rho_{0B} r^2} \frac{d}{dr} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \end{pmatrix} d^3r$$

dove nell'integrale sono presenti prodotti tra matrici e vettori. L'equilibrio è stabile se  $\mathcal{F}$  è un minimo locale, cioè  $\delta^2 \mathcal{F}$  è definita positiva. La variazione seconda può essere positiva per qualsiasi scelta delle funzioni  $M_{1A}$  e  $M_{1B}$  (ricordiamo che se la variazione seconda è definita positiva lo stato di equilibrio è stabile) solo se i suoi autovalori sono tutti positivi. Per trovare gli autovalori si considerino tutte le coppie di funzioni  $M_{1A}$ ,  $M_{1B}$  che soddisfano la seguente espressione:

$$\begin{bmatrix} \frac{G}{2Tr^2} + \frac{k}{m_A} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{8\pi\rho_{0A} r^2} \frac{d}{dr} \right) & \frac{G}{2Tr^2} \\ \frac{G}{2Tr^2} & \frac{G}{2Tr^2} + \frac{k}{m_B} \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{8\pi\rho_{0B} r^2} \frac{d}{dr} \right) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} M_{1A} \\ M_{1B} \end{pmatrix} \quad (3.106)$$

allora  $\lambda$  definito da quest'ultima espressione è un autovalore. Vogliamo capire sotto quali condizioni esistono autovalori solo positivi oppure no. Per la stabilità marginale cerchiamo un caso in cui è possibile trovare una coppia  $M_{1A}$ ,  $M_{1B}$  tale che  $\lambda = 0$ . Si tratta di risolvere un sistema di due equazioni differenziali, con le condizioni al bordo (3.105).

Studiando la stabilità dinamica, arriveremo a un sistema di equazioni differenziali che, se scritto in termini delle stesse variabili, è identico all'equazione (3.106) nei casi di stabilità marginale, e dunque l'instabilità termodinamica e dinamica si instaurano negli stessi punti anche nel caso a due componenti (perlomeno per quanto riguarda l'instabilità a  $T$  e  $V$  costanti).

### 3.4.3 Instabilità Dinamica

Ricaviamo le condizioni sotto cui si instaura l'instabilità dinamica a  $T$  e  $V$  costanti nel caso di due componenti. Lavoriamo in visione Euleriana. Il procedimento è del tutto simile a quello utilizzato per il caso di una componente. Le equazioni di partenza trascurando direttamente il termine quadratico nelle velocità e assumendo simmetria sferica sono:

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_A + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_A v_A) &= 0 & \text{Equazione di continuità} \\ \partial_t v_A &= -\frac{\partial_r \rho_A}{\rho_A} \frac{kT}{m_A} - \frac{GM(r)}{r^2} & \text{Equazione di Eulero} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_t \rho_B + \frac{1}{r^2} \partial_r (r^2 \rho_B v_B) &= 0 & \text{Equazione di continuità} \\ \partial_t v_B &= -\frac{\partial_r \rho_B}{\rho_B} \frac{kT}{m_B} - \frac{GM(r)}{r^2} & \text{Equazione di Eulero} \end{aligned}$$

$$M(r, t) = \int_0^r (\rho_A(s, t) + \rho_B(s, t)) 4\pi s^2 ds \quad \text{Forza gravitazionale, assunta simmetria sferica} \quad (3.107)$$

Introduciamo le seguenti definizioni e per sviluppare successivamente al primo ordine nelle quantità col pedice 1:

$$\begin{cases} \rho_A(r, t) = \rho_{0A}(r) + \rho_{1A}(r, t) \\ \rho_B(r, t) = \rho_{0B}(r) + \rho_{1B}(r, t) \\ v_A(r, t) = v_{1A}(r, t) \\ v_B(r, t) = v_{1B}(r, t) \end{cases} \quad (3.108)$$

e supponiamo le seguenti dipendenze:

$$\begin{cases} \rho_{1A}(r, t) = \rho_{1A}(r)e^{-i\omega t} \\ \rho_{1B}(r, t) = \rho_{1B}(r)e^{-i\omega t} \\ v_{1A}(r, t) = v_{1A}(r)e^{-i\omega t} \\ v_{1B}(r, t) = v_{1B}(r)e^{-i\omega t} \end{cases} \quad (3.109)$$

L'equilibrio idrostatico richiede:

$$\begin{aligned} \frac{GM_0(r)\rho_{0A}}{r^2} &= -\frac{d\rho_{0A}}{dr} \frac{kT}{m_A} \\ \frac{GM_0(r)\rho_{0B}}{r^2} &= -\frac{d\rho_{0B}}{dr} \frac{kT}{m_B} \end{aligned} \quad (3.110)$$

Svolgendo i calcoli otteniamo:

$$\begin{aligned} \omega^2 f_A &= \left( \frac{\partial_r \rho_{0A}}{\rho_{0A}} \left( \frac{2}{r} f_A + \partial_r f_A \right) - \partial_r^2 f_A - \frac{2}{r} \partial_r f_A + \frac{2}{r^2} f_A \right) \frac{kT}{m_A} - 4\pi G \rho_{0A} (f_A + f_B) \\ \omega^2 f_B &= \left( \frac{\partial_r \rho_{0B}}{\rho_{0B}} \left( \frac{2}{r} f_B + \partial_r f_B \right) - \partial_r^2 f_B - \frac{2}{r} \partial_r f_B + \frac{2}{r^2} f_B \right) \frac{kT}{m_B} - 4\pi G \rho_{0B} (f_A + f_B) \end{aligned} \quad (3.111)$$

Dove

$$\begin{aligned} f_A &\equiv \rho_{0A} v_{1A} \\ f_B &\equiv \rho_{0B} v_{1B} \end{aligned} \quad (3.112)$$

Questo sistema di equazioni per  $\omega = 0$ , se scritto in termini delle stesse variabili, è identico al sistema (3.106) per  $\lambda = 0$ , come avevamo anticipato. Sostituendo i profili di densità di equilibrio (formule (2.18)) e eseguendo gli stessi cambi di variabile che abbiamo usato per calcolare gli equilibri nel capitolo 2 e utilizzando la stessa notazione, vale a dire:

$$\begin{cases} r = \left[ \frac{\tau_A + \tau_B}{\rho_{Ac} + \rho_{Bc}} \right]^{\frac{1}{2}} \xi \\ \tau_{A,B} = \frac{kT}{4\pi G m_{A,B}} \\ \rho_{A0} = \rho_{Ac} e^{-\psi_A} \\ \rho_{B0} = \rho_{Bc} e^{-\psi_B} \\ \alpha = \frac{\rho_{Bc}}{\rho_{Ac}} \\ \beta = \frac{m_B}{m_A} = \frac{\tau_A}{\tau_B} \end{cases} \quad (3.113)$$

Otteniamo:

$$\boxed{\begin{aligned} Lf_A &= \left( -(1 + \frac{1}{\beta}) \psi' \left( \frac{2}{\xi} f_A + f'_A \right) - f''_A - \frac{2}{\xi} f'_A + \frac{2}{\xi^2} f_A \right) \frac{1}{1 + \frac{1}{\beta}} - \frac{1}{1 + \frac{1}{\alpha}} e^{-(1 + \frac{1}{\beta})\psi} (f_A + f_B) \\ Lf_B &= \left( -(1 + \beta) \psi' \left( \frac{2}{\xi} f_B + f'_B \right) - f''_B - \frac{2}{\xi} f'_B + \frac{2}{\xi^2} f_B \right) \frac{1}{1 + \beta} - \frac{1}{1 + \alpha} e^{-(1 + \beta)\psi} (f_A + f_B) \end{aligned}} \quad (3.114)$$

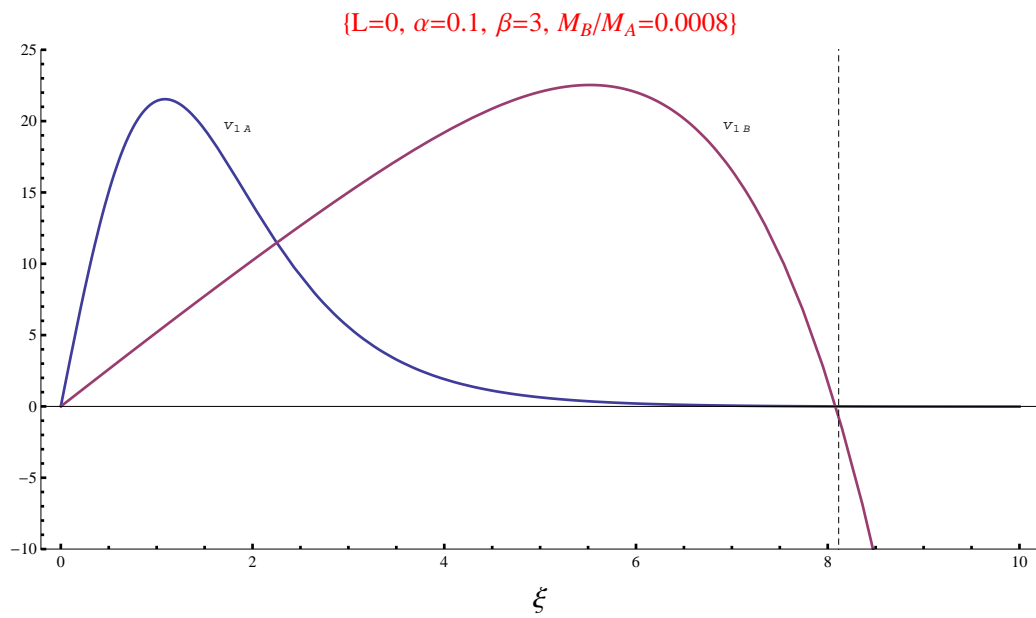
Dove

$$L = \frac{\omega^2}{4\pi G(\rho_{Ac} + \rho_{Bc})}. \quad (3.115)$$

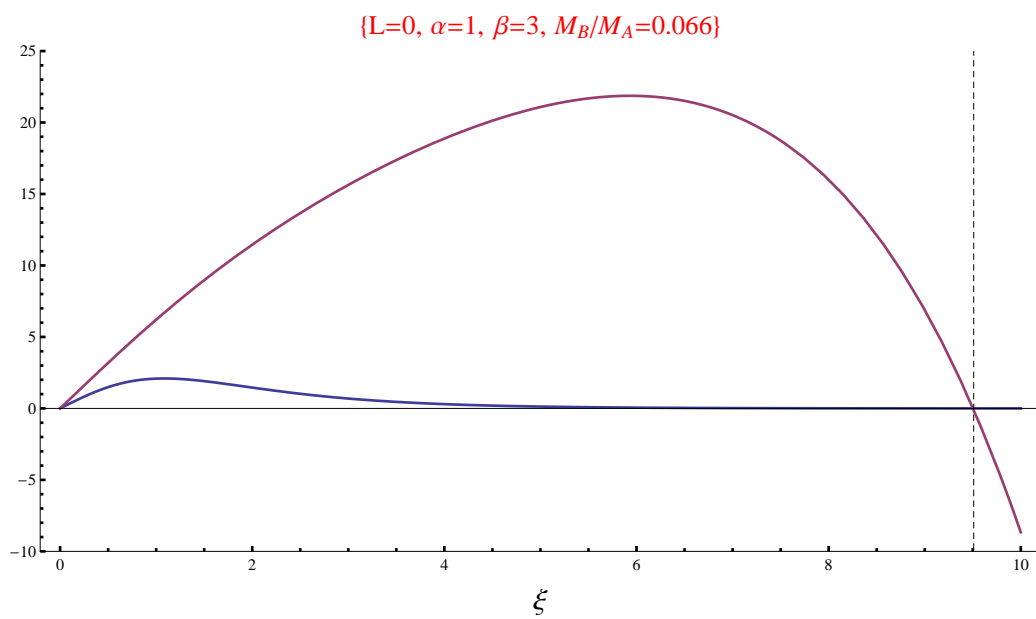
Questo sistema di equazioni è la generalizzazione dell'equazione (3.32) nel caso a due componenti. Come condizioni al contorno, richiediamo le seguenti:

$$\begin{aligned} f_A(0) &= f_B(0) = 0 \\ f_A(\Xi) &= f_B(\Xi) = 0 \end{aligned} \quad (3.116)$$

Le prime corrispondono alla richiesta che la velocità sia finita in zero, le seconde due alla richiesta che la velocità sia nulla al bordo. Alcune soluzioni di questa equazione per il caso di stabilità marginale sono mostrate nella figura 3.21.



(a)



(b)

Figura 3.21: Per la descrizione si faccia riferimento alla figura 3.22

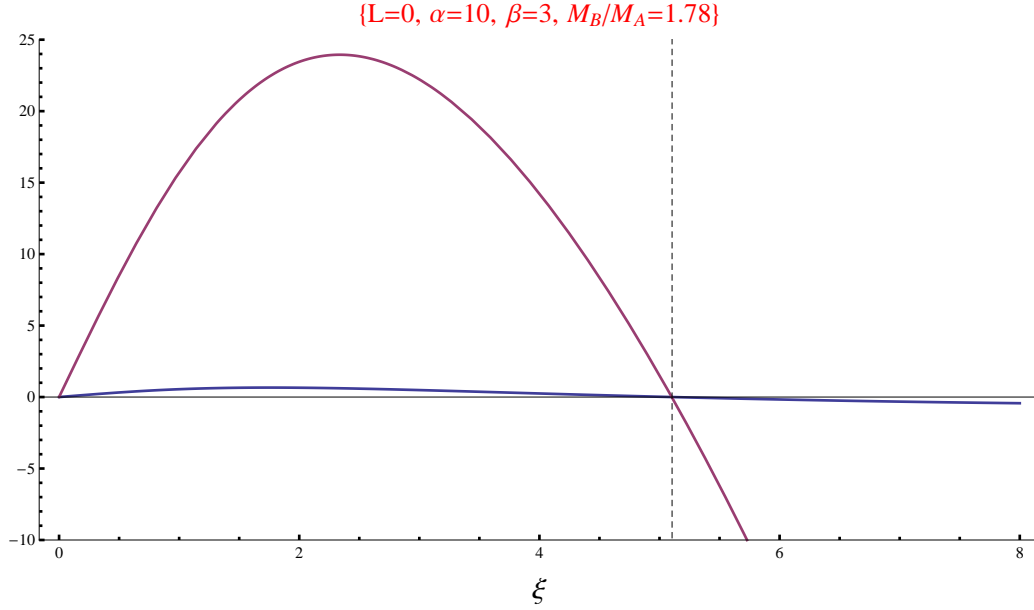
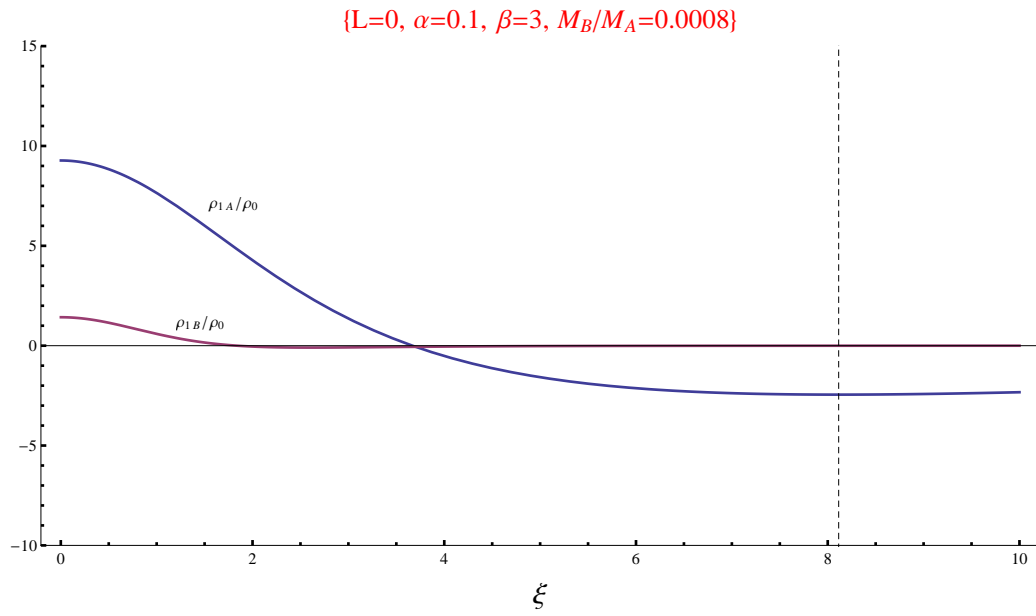
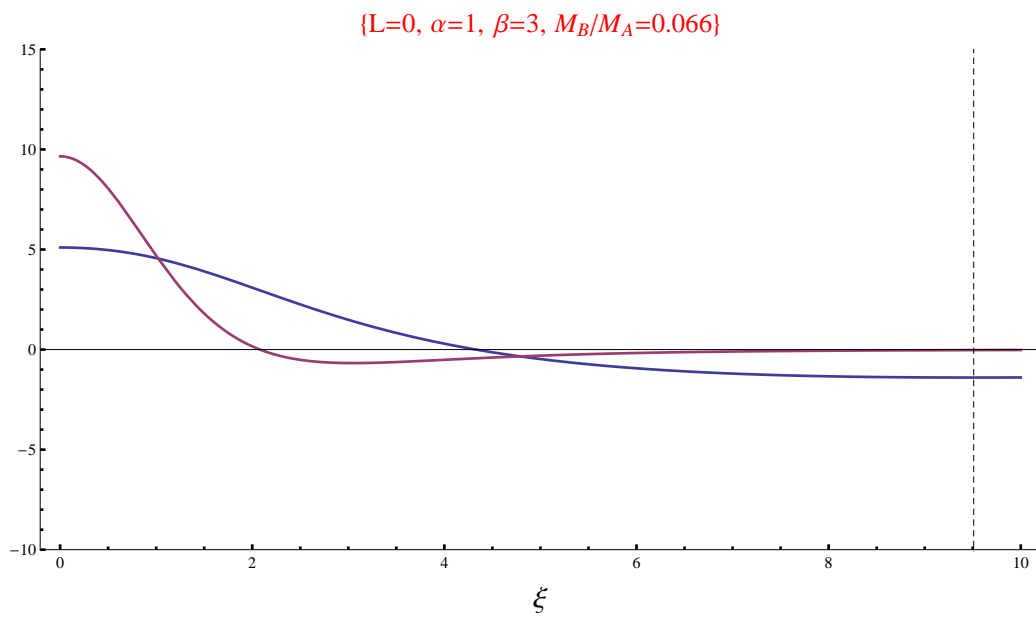


Figura 3.22: Profili di velocità ottenuti risolvendo il sistema di equazioni (3.114), che permette di trovare i modi normali del sistema. Ponendo  $\Xi$ , il raggio adimensionale del sistema, pari al valore segnato dalla linea tratteggiata (dove le velocità sono nulle) si ottiene una soluzione che rispetta le corrette condizioni al contorno (3.116). In blu è rappresentata la prima componente, in rosso la seconda componente. Tutte le figure rappresentano casi di stabilità marginale in cui  $L = 0$  e in cui  $\Xi$  è quello minimo possibile (e quindi è quello per cui il sistema passa da stabile a instabile), per diversi valori del rapporto fra le masse totali  $M_B/M_A$ . Si nota che le velocità della componente più massiccia diventano rapidamente più alte di quelle della componente meno massiccia all'aumentare di  $M_B/M_A$ . Anche per rapporti fra le masse totali  $M_B/M_A$  molto piccoli (in particolare  $M_B/M_A = 0.066$ ) la velocità della componente più massiccia è molto più alta. Un comportamento analogo si ritrova nei profili di densità: questo suggerisce che l'instabilità sia guidata dalla componente più massiccia anche quando quest'ultima è presente in modeste quantità.



(a)



(b)

Figura 3.23: Per la descrizione si faccia riferimento alla figura 3.24



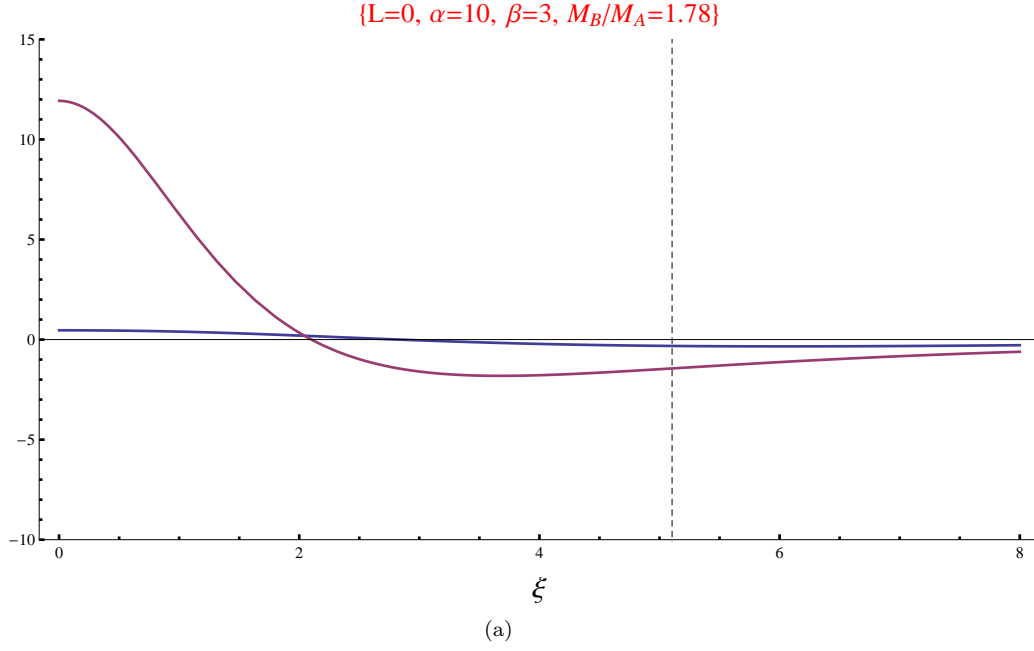


Figura 3.24: Profili di densità (riferiti alla densità totale imperturbata) ottenuti risolvendo il sistema di equazioni (3.114), che permette di trovare i modi normali del sistema. Ponendo  $\Xi$ , il raggio adimensionale del sistema, pari al valore segnato dalla linea tratteggiata (dove le velocità sono nulle) si ottiene una soluzione che rispetta le corrette condizioni al contorno (3.116). In blu è rappresentata la prima componente, in rosso la seconda componente. Tutte le figure rappresentano casi di stabilità marginale in cui  $L = 0$  e in cui  $\Xi$  è quello minimo possibile (e quindi è quello per cui il sistema passa da stabile a instabile), per diversi valori del rapporto fra le masse totali  $M_B/M_A$ . Si nota che le perturbazioni di densità della componente più massiccia diventano rapidamente più grandi di quelle della componente meno massiccia: anche per rapporti fra le masse totali  $M_B/M_A$  molto piccoli (in particolare  $M_B/M_A = 0.066$ ) prevale la perturbazione di densità dovuta alla componente massiccia. Un comportamento analogo si ritrova nei profili di velocità: questo suggerisce che l'instabilità sia guidata dalla componente più massiccia anche quando quest'ultima è presente in modeste quantità.

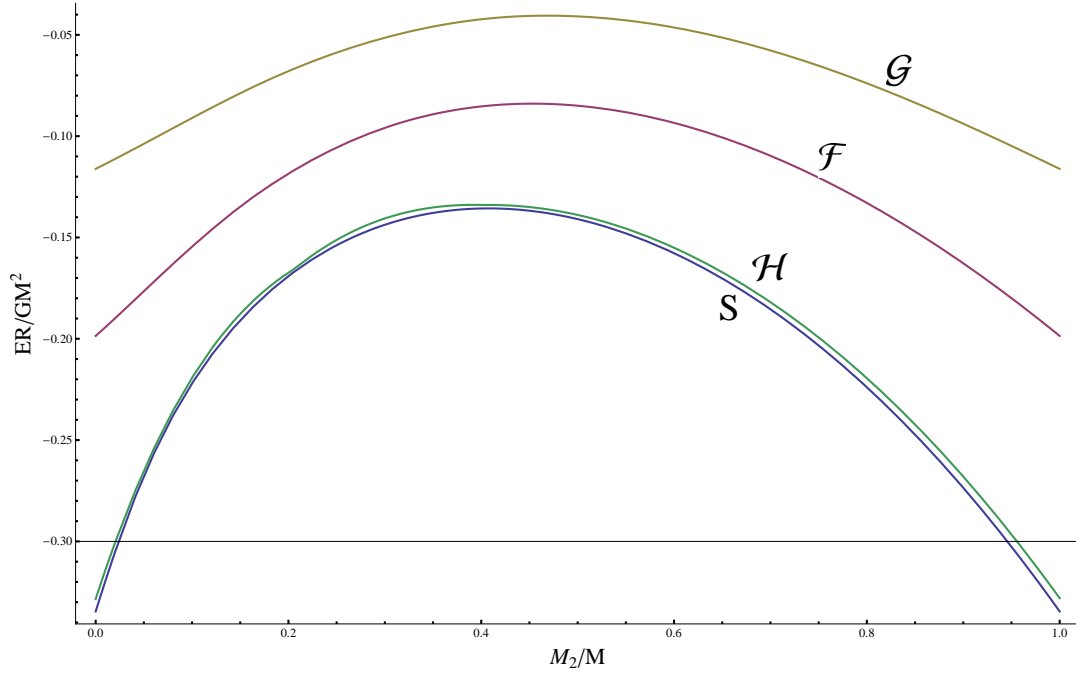


Figura 3.25: Energia in unità adimensionali a cui si innescano i quattro tipi di instabilità associati ai quattro potenziali termodinamici, descritti nella Sezione 3.2.2, per  $\beta = m_B/m_A = 2$  e al variare di  $M_B/M$  (il rapporto fra la massa totale della componente massiccia e la massa totale di entrambe le componenti). Vicino ad ogni curva è segnato il potenziale termodinamico relativo. Si nota che l'instabilità si manifesta a valori dell'energia più alti che nel caso a una componente, e che l'ordine delle quattro instabilità viene rispettato (l'ordine è garantito anche da alcuni teoremi generali, si veda [8]). Aumentando ulteriormente  $\beta$ , le curve si alzano senza limiti e quindi possono raggiungere energie positive (si veda anche [23]), indicando che un sistema autogravitante legato stabile non può esistere per certi rapporti fra le masse di due componenti. Il rapporto  $M_B/M$  a cui l'energia dello stato stabile di energia minima è positiva è stata messa in relazione al criterio di Spitzer, descritto nel primo capitolo della Tesi, da Lightman [23] e Yoshizawa [43]. Tali autori hanno trovato un accordo semi-quantitativo tra il criterio di Spitzer e i valori di  $M_B/M$  a cui l'energia minima diventa positiva al variare di  $\beta$ .

# Capitolo 4

## Discussione e Conclusioni

### 4.1 Termodinamica e Dinamica

Nei capitoli precedenti abbiamo studiato le instabilità termodinamiche e dinamiche (quelle dinamiche con un modello fluido) della sfera isoterma, e abbiamo stabilito che i due tipi di instabilità, tradizionalmente considerati come indipendenti, sono in realtà strettamente connessi, perché si trova una corrispondenza esatta tra i punti in cui si innescano. Una delle principali differenze consiste nel fatto che se si pensa all'instabilità in termini termodinamici, si è portati a identificare il tempo scala tipico su cui avviene il collasso con quello della conduzione termica (che per gli ammassi globulari viene tradizionalmente preso uguale a quello delle collisioni a due corpi), mentre se si pensa all'instabilità in termini dinamici si è portati a pensare che il tempo tipico sia quello dinamico, dell'ordine di  $(G\rho)^{-1/2}$ . Nell'approccio termodinamico l'instabilità viene qualitativamente spiegata facendo ricorso a calori specifici negativi e al fatto che il flusso di calore è in direzione del corpo di temperatura minore, mentre nell'approccio fluido l'instabilità è qualitativamente spiegata col fatto che la pressione non riesce a sostenere il peso della materia sovrastante. Ricordiamo anche che, come abbiamo notato nel primo capitolo, a causa del lungo cammino libero medio delle stelle, quando si tratti il caso di un ammasso globulare il concetto di conduzione termica deve essere considerato con cautela. Si devono inoltre tenere presente le differenti ipotesi di lavoro, descritte nel primo capitolo, quando si tratti con un ammasso globulare reale, con un modello gassoso o con un modello fluido:

$$\begin{aligned}
 t_d &<< t_{\text{LTE}} \simeq t_{\text{GTE}} && \text{(Ammasso Globulare)} \\
 t_{\text{LTE}} &<< t_d << t_{\text{GTE}} && \text{(Gas di Laboratorio)} \\
 \begin{cases} t_{\text{LTE}} << t_d \\ t_{\text{GTE}} << t_d \end{cases} &&& \text{(Modello Fluido)}
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Sembra lecito domandarsi a questo punto se l'instabilità discussa nella Tesi non sia che una forma di instabilità di Jeans, dinamica, riscoperta in ambiente disomogeneo, ovvero essa non sia dinamica *anziché* termodinamica. Come già notato nel primo capitolo e come tra breve discuteremo ulteriormente, l'uso del concetto di entropia di Boltzmann per ammassi globulari non è fondato rigorosamente a livello concettuale. Un vero equilibrio termodinamico per un sistema di  $N$  masse puntiformi che interagiscono tra loro tramite il potenziale gravitazionale potrebbe anche non esistere (o consistere in tutte le particelle collassate in un punto). In tal caso ci si può chiedere se la sfera isoterma abbia qualcosa in più (è più stabile?) rispetto ad altre soluzioni stazionarie dell'equazione di Boltzmann non collisionale che però non siano massimi dell'entropia di Boltzmann, come ad esempio i modelli di King. Detto in altre parole: per un sistema qual è il significato dell'essere massimi locali dell'entropia di Boltzmann, se questo non consiste in un vero equilibrio termodinamico? Perché scegliere come entropia

l'espressione di Boltzmann, che usualmente viene ritenuta valida solo per un gas molto diluito in cui le forze di interazione tra le particelle sono trascurabili?

Discutiamo brevemente su questi temi, evidenziandone alcuni aspetti, senza la pretesa di fornire un quadro completo dello stato attuale in materia: è tuttora argomento di ricerca definire i limiti di validità dell'espressione dell'entropia di Boltzmann, soprattutto nel caso di sistemi con forze a lungo raggio di azione. Un articolo che si occupa della differenza tra i due tipi di entropia (in sistemi non problematici, cioè non a lungo raggio di azione, in cui gli stati di equilibrio sono omogenei a differenza che nei sistemi autogravitanti) è [15]: in questo articolo è evidenziato il fatto che l'entropia di Boltzmann fornisce un'entropia che è in considerevole errore quando non si possono trascurare le forze intermolecolari, e questo è certamente il caso della gravità. Ciò mostra che vale la pena di investigare il perché di questa scelta.

La scelta dell'entropia di Boltzmann segue i lavori classici sull'argomento, ad esempio [1], [24]. In Lynden-Bell e Wood troviamo un paragrafo in cui spiegano brevemente che l'entropia di Boltzmann trascura le correlazioni fra le particelle, e che la catastrofe può prendere il via proprio quando queste comincino a diventare importanti. Una scelta differente per l'entropia che potrebbe sembrare appropriata nel caso di un sistema isolato (cioè ad energia costante) è l'entropia di Gibbs microcanonica definita da:

$$S_g(E, V, N) \equiv k \log \Gamma(E, V, N), \quad (4.2)$$

$$\Gamma(E, V, N) = \frac{1}{N!} \int \delta(E - H(p, q)) \, dq \, dp, \quad (4.3)$$

dove  $H$  è l'hamiltoniana totale del sistema,  $p$  e  $q$  denotano simbolicamente tutte le coordinate canoniche del sistema che ne specificano completamente lo stato microscopico, e l'integrazione è estesa a tutto lo spazio delle fasi accessibile.  $\Gamma(E)$  corrisponde al volume disponibile nello spazio delle fasi totale (a  $6N$  dimensioni) fissata l'energia del sistema. Utilizzare l'entropia di Gibbs porta a risultati differenti dall'utilizzare l'entropia di Boltzmann? Quali sono le caratteristiche di una e dell'altra scelta? Innanzitutto per utilizzare l'entropia di Gibbs è necessario introdurre un taglio al potenziale a piccole distanze (per esempio considerando, al posto di masse puntiformi, biglie impenetrabili di grandezza finita), altrimenti l'espressione (4.3) diverge. Una volta introdotto il taglio, è lecito aspettarsi che nel limite di temperature altissime le due descrizioni coincidano: se le temperature sono tali che  $kT$  è molto più grande dell'energia gravitazionale massima ottenibile compattando le biglie il più possibile, quello che ne risulta è un gas diluito in cui le forze contano poco. Quando si diminuisce la temperatura, probabilmente le due entropie forniscono risultati differenti, e per sistemi isolati a lungo raggio di azione pare essere più appropriata  $S_g$  (vedi [33]).

Una osservazione importante che riguarda l'entropia di Boltzmann e che può aiutare a comprenderne il significato fisico è che, come si può verificare (vedi Sottosezione 2.1.2.2) l'entropia di Boltzmann è l'unica che corrisponde all'entropia termodinamica classica (senza quindi fare riferimento a ragionamenti legati alla meccanica statistica) quando si consideri un sistema fluido con equazione di stato  $P = \rho/mkT$  e si eseguano trasformazioni reversibili tra stati di equilibrio. L'entropia termodinamica classica è definita dalla relazione

$$dS_c = \frac{dQ}{T}, \quad (4.4)$$

dove  $Q$  è il calore assorbito dal sistema in una trasformazione reversibile e  $T$  è la temperatura. Dalla definizione termodinamica classica, giungiamo così alla conclusione che la correttezza dell'entropia di Boltzmann è strettamente connessa alla correttezza dell'ipotesi di un'equazione di stato  $P = \rho kT/m$ : assumendo una diversa equazione di stato, si ottiene una diversa espressione per l'entropia termodinamica classica, che non coincide con l'entropia di Boltzmann. L'equazione di stato è a sua volta una conseguenza dell'assumere una funzione di distribuzione Maxwelliana del tipo  $f(r, v) = e^{-mv^2/2kT(r)}$  e come definizione di pressione  $P \equiv \int f m v^2 / 3$ . Questa definizione di pressione è quella ottenuta calcolando la quantità di

moto media trasportata dalle particelle attraverso una superficie, e corrisponde alla pressione vera che subisce una parete a causa degli urti. Osserviamo però che quando si consideri un gas con interazioni questo non è l'unico contributo alla pressione: immaginiamo ad esempio delle particelle che interagiscono tra loro tramite un potenziale fortemente repulsivo e di metterle in una scatola: esse eserciteranno una forza sulle pareti della scatola anche stando ferme a causa della forza repulsiva tra loro, e questo contributo non è considerato nella definizione di pressione data sopra. Nel caso di un potenziale attrattivo, come quello gravitazionale, questa forza è attrattiva e dunque presumibilmente la forza esercitata sulle pareti da un sistema realistico sarebbe minore che quella che si calcola con l'entropia di Boltzmann e il collasso ne verrebbe ulteriormente favorito. Sembra anche possibile che per potenziali fortemente attrattivi l'equazione di stato debba essere tale che, se la dispersione di velocità rimane la stessa, la pressione diminuisca se aumenta la densità (perché le forze gravitazionali si fanno sentire di più), contrariamente alle situazioni usuali.

Quella della forma dell'equazione di stato è una delle poche ipotesi fatte nell'approccio fluido che abbiamo considerato per lo studio della stabilità. Tale ipotesi è molto semplice, e quindi aiuta a chiarire i limiti in cui è applicabile il paradigma della catastrofe gravotermica.

Le osservazioni appena fatte suggeriscono che, quando si consideri un sistema le cui particelle interagiscono tramite un potenziale a due corpi generico, analizzare il sistema massimizzando l'entropia di Boltzmann a fissata energia totale sia equivalente a studiare il sistema imponendo l'equilibrio idrostatico per un fluido con equazione di stato  $P = \rho kT/m$ . In effetti si può mostrare come i profili di densità che si ottengono soddisfano la stessa equazione, e dunque probabilmente anche  $S_c$  e  $S_b$  coincidono. Se l'equivalenza è corretta, per studiare in approssimazione di campo medio (ossia utilizzando l'entropia di Boltzmann) un sistema di particelle che interagiscono con un potenziale arbitrario  $V(r)$  si potrebbe ricavare il profilo di densità imponendo l'equilibrio idrostatico e poi costruire il grafico analogo alla figura 2.4(a) per vedere ad esempio se si instaurano calori specifici negativi o se si ha tendenza al collasso. Pensare il sistema come un fluido potrebbe essere intuitivamente più facile che pensare all'entropia di Boltzmann, inoltre può essere utile a chiarire il senso dell'approccio termodinamico di campo medio in generale. Nell'appendice C ricaviamo l'equazione che fornisce i profili di densità per equilibri idrostatici con potenziali arbitrari.

Per concludere la Sezione, solleviamo un'ultima domanda:

- Come si spiegano i calori specifici negativi nel quadro della termodinamica statistica?

Come riferimento generale per questa discussione si veda ad esempio [26]. Quando si considera un sistema all'equilibrio termodinamico utilizzando l'ensemble canonico (che è diverso dall'ensemble microcanonico definito dalla formula (4.2). In generale i due ensemble sono equivalenti, ma non per i sistemi autogravitanti [33].) di Gibbs, in cui la probabilità che si realizzi lo stato  $i$  è proporzionale a  $e^{-\frac{E_i}{kT}}$ , si dimostra in poche righe<sup>1</sup> che il calore specifico è dato dalla seguente espressione:

$$C_V = \frac{1}{kT^2} \langle (E - \langle E \rangle)^2 \rangle, \quad (4.5)$$

cioè dalla media di una quantità positiva, che ovviamente è positiva. Dunque studiando un sistema con l'ensemble canonico non è possibile trovare calori specifici negativi. Nello studio della sfera isoterma autogravitante abbiamo invece trovato calori specifici negativi. Nel caso della sfera isoterma si può pensare che il calore specifico negativo è una conseguenza teorema del viriale. Infatti, per un sistema di particelle autogravitanti senza un bordo fisico che le contenga il teorema del viriale afferma che:

$$E = -\mathcal{T} \quad (4.6)$$

<sup>1</sup>Basta partire dalle definizioni  $\langle E \rangle(T) = \sum_i E_i e^{-E_i/kT} / \sum_i e^{-E_i/kT}$  e  $C_V \equiv d\langle E \rangle/dT$ .

dove  $E$  è l'energia totale e  $\mathcal{T}$  è l'energia cinetica del sistema. Identificando l'energia cinetica del sistema con  $3NkT/2$  segue subito che il calore specifico vale:

$$C_V = \frac{dE}{dT} = -\frac{3}{2}Nk \quad (4.7)$$

che è negativo. Nel caso della sfera isoterma studiata nel capitolo 2 il teorema del viriale è modificato dalla presenza del termine di bordo  $3PV$ , ma il motivo fisico per cui appaiono calori specifici negativi rimane lo stesso.

Come si spiega questo “paradosso”? Thirring [41] ha fatto per primo notare che se si studia un sistema con l'ensemble microcanonico è possibile che risultino calori specifici negativi (si veda anche l'appendice B). In questi regimi senz'altro dunque l'ensemble canonico e microcanonico non sono equivalenti, il che rappresenta una situazione inusuale in quanto nella maggior parte delle applicazioni essi sono equivalenti. Vogliamo qui porre la seguente domanda: qual è la relazione tra il calore specifico negativo trovato nell'analisi della sfera isoterma con il calore specifico negativo trovato con lo studio dell'ensemble microcanonico? Osserviamo ad esempio che con l'ensemble microcanonico il calore specifico negativo appare quando in corrispondenza di un piccolo aumento di energia si ha un grande aumento di  $\Gamma(E)$ , cioè del volume disponibile nello spazio delle fasi del sistema ad energia  $E$  (si veda l'appendice B). Dunque nell'ensemble microcanonico ci si aspetta calore specifico negativo in prossimità dell'energia per cui un sistema diventa slegato, perché in tali situazioni con un piccolo aumento dell'energia possiamo guadagnare un grande contributo allo spazio delle fasi disponibile (le particelle possono muoversi in molto più spazio fisico se superano l'energia per cui il sistema è slegato). Di conseguenza, nel caso di un sistema gravitante ci si aspetta che il calore specifico negativo si instauri nelle vicinanze di  $E = 0$ , e questo è confermato da modelli giocattolo in cui si considerano solo due particelle [33]. Osserviamo però che nel caso della sfera isoterma a una componente il calore specifico negativo si instaura un po' sotto questo valore (vedi figura 2.2(c)). Nel caso della sfera isoterma a due componenti è possibile che questo calore specifico si instauri per energie positive anche molto grandi, cioè quando il sistema è già slegato (si veda [23] e [43] e la Sezione 3.4). In questi regimi quindi sembra che l'ensemble microcanonico e l'entropia di Boltzmann non diano risultati equivalenti, e se ciò fosse confermato sarebbe interessante sapere il perché di questa discrepanza. In generale sarebbe interessante sapere se il calore specifico negativo trovato in approcci di campo medio sia riconducibile al calore specifico negativo trovato con l'entropia di Gibbs microcanonica.

## 4.2 Possibile Ruolo del Momento Angolare Dettagliato

Nell'introduzione a questa Tesi abbiamo sollevato alcune questioni:

1. La catastrofe gravotermica avviene negli ammassi globulari e/o in un sistema ideale di  $N$  masse puntiformi che interagiscono tra loro solo tramite l'interazione gravitazionale, e se avviene in cosa consiste precisamente?
2. Qual è il ruolo del bordo fisico artificiale (che non esiste in un ammasso reale, se non come taglio mareale che però non può far rimbalzare le stelle) considerati dai modelli gassosi tipo Ebert, Bonnor, Lynden-Bell & Wood e anche dal modello fluido?
3. Se la catastrofe avviene, su quali tempi scala si sviluppa? Come evolvono in seguito tali sistemi?
4. A cosa sono dovute le oscillazioni gravotermiche osservate nelle simulazioni a  $N$  corpi? In linea di principio, se si potesse proseguire la simulazione per tempi lunghissimi, il sistema continuerebbe a oscillare indefinitamente o smetterebbe, trovando un proprio stato di quasi equilibrio?
5. Le collisioni sono un ingrediente fondamentale perché avvenga la catastrofe? Può la catastrofe avvenire in ambiente non collisionale?

Scopo di questa discussione non è ovviamente quello di rispondere in modo esaustivo a queste domande, e non è nemmeno di passare in rassegna tutto ciò che si può trovare in letteratura a riguardo. Lo scopo è piuttosto di fare alcune osservazioni, anche alla luce dei risultati ottenuti in questa tesi. Partiamo discutendo la domanda numero 5.

Se il collasso potesse avvenire in regime non collisionale, allora i tempi scala sui cui avviene il collasso sarebbero dinamici. È possibile provare che, quando si consideri un sistema senza bordo fisico, in regime non collisionale lineare (cioè linearizzando l'equazione di Boltzmann attorno agli stati di equilibrio definiti dalla sfera isoterma) il sistema è stabile per piccole perturbazioni attorno allo stato di equilibrio [3]. Abbiamo visto che invece il sistema fluido è instabile rispetto a perturbazioni lineari a simmetria sferica, mentre è stabile per perturbazioni a simmetria non sferica [35], [3]. È possibile provare (vedi appendice A), con un argomento che sfrutta la conservazione del momento angolare, che in regime non collisionale a simmetria sferica il collasso è proibito anche in regime non lineare, sia in presenza che in assenza di un bordo fisico. Osserviamo però che il caso di perturbazioni radiali a simmetria sferica è proprio l'unico caso in cui l'instabilità si manifesta nel caso fluido. Tali argomentazioni ci portano a congetturare che in ambiente non collisionale la catastrofe non possa mai avvenire (quando c'è simmetria sferica il sistema non collisionale non può collassare, quando non c'è simmetria sferica il problema resta aperto però il modello fluido è stabile per perturbazioni non radiali). Questa congettura è e anche confermata dal fatto che nelle simulazioni a  $N$  corpi le oscillazioni gravotermiche avvengono su tempi scala delle collisioni a due corpi e non su tempi dinamici.

Concentrandoci per un momento sul caso di simmetria sferica, possiamo chiederci perché, partendo dalla stessa configurazione di equilibrio, il sistema fluido sia instabile mentre il sistema non collisionale sia stabile. Una delle differenze tra i due sistemi è che mentre uno strato di fluido è sostenuto dalla pressione degli strati sottostanti, nel sistema non collisionale non c'è una vera e propria pressione e il sistema è sostenuto dal fatto che le particelle hanno un certo momento angolare, e il collasso è impedito dal fatto che in regime non collisionale non c'è modo di togliere momento angolare alle singole particelle. Infatti una delle differenze tra vedere gli *stessi* stati di equilibrio idrostatico con i fluidi o con l'approccio cinetico è questa: nel primo caso ciascun elemento di fluido è fermo, e se viene a mancare la pressione che sostiene può collassare verso il centro. Nel secondo caso le particelle hanno una velocità microscopica distribuita secondo una Maxwelliana, ed è questa velocità che ne impedisce il collasso: se fossero ferme collasserebbero. Di tale velocità microscopica si perde traccia nella visione fluida.

Anche nella situazione reale di un ammasso globulare le stelle sono sostenute dal momento angolare, e non da una pressione in senso stretto, perché le stelle compiono vari periodi orbitali prima di risentire dell'effetto delle collisioni. Sembra dunque plausibile congetturare che se il collasso avviene in un ammasso globulare, esso consista in una lenta perdita dei momenti angolari delle singole stelle (in valore assoluto), che affondano verso il centro.

Una particella che si muove in un potenziale gravitazionale generato da una massa  $M$  con momento angolare  $L$  passa la maggior parte del suo tempo ad una distanza tipica dal centro che è dell'ordine di:

$$d = \frac{L^2}{Gm^2M} \quad (4.8)$$

quindi per un sistema stellare di massa  $M$  si può definire un raggio legato al momento angolare:

$$R_{\text{ang}} \equiv \frac{A}{NGm^2M}. \quad (4.9)$$

Si potrebbe congetturare che il collasso sia legato alla diminuzione della somma dei moduli dei momenti angolari delle singole particelle, o dei loro quadrati, cioè dalla seguente quantità:

$$A \equiv \sum_i \mathbf{L}_i^2 \quad (4.10)$$

dove  $\mathbf{L}_i$  è il momento angolare della singola  $i$ -esima particella. Se il collasso in un ammasso globulare è dovuto alla diminuzione di  $A$ , il tempo tipico su cui il collasso avviene sarebbe

dell'ordine di:

$$t_{\text{coll}} \equiv A / \frac{dA}{dt} \quad (4.11)$$

Il processo principale secondo cui  $A$  varia nel tempo sono plausibilmente le collisioni a due corpi. Così il tempo scala  $t_{\text{coll}}$  sarebbe dell'ordine del tempo di collisione a due corpi. Osserviamo però che, nello scenario in cui il collasso sia guidato dalla diminuzione di  $A$ , poiché non è difficile immaginare in un insieme di particelle autogravitanti sia processi (a due o a più corpi) che aumentano sia processi che diminuiscono  $A$ , non è da escludere a priori che si raggiunga una situazione in cui  $A$  tende a un valore di equilibrio e il collasso non avviene: in questo caso il tempo  $t_{\text{coll}}$  tenderebbe a infinito quando  $A$  raggiunge la situazione di equilibrio. Sarebbe interessante a questo scopo osservare come evolve la quantità  $A$  al variare del tempo nelle simulazioni a  $N$  corpi. Si potrebbe ad esempio trovare che le oscillazioni gravotermiche sono dovute all'oscillare della quantità  $A$  attorno al valore di equilibrio: questo sarebbe in accordo col fatto che il loro tempo scala sia quello delle collisioni a due corpi.

Se lo scenario in cui il collasso è guidato da una diminuzione di  $A$  si rivelasse errato, allora il collasso potrebbe avvenire senza che la quantità  $A$  tenda a zero (oppure potrebbe risultare che la diminuzione di  $A$  è legata al collasso solo indirettamente, o ancora che il collasso non avviene del tutto). Nell'ipotesi in cui il collasso avviene ma  $A$  non tende a zero ci possiamo allora chiedere quali parti del sistema contribuiscano maggiormente ad  $A$ : se il contributo derivasse dalle particelle vicine al centro allora dovrebbero andare molto veloci, ma si potrebbe obiettare che allora dovrebbero allontanarsi dal centro. Se il contributo derivasse dalle particelle più lontane dal centro, questo potrebbe essere interpretato come se queste particelle abbiano preso parte del momento angolare, allontanandosi all'infinito, e allora la presenza di un bordo potrebbe diventare determinante perché impedirebbe che questa parte di particelle fuga all'infinito. Sarebbe infine da chiarire anche il ruolo delle stelle binarie (che portano parte del contributo ad  $A$ ) e delle stelle con orbite molto elongate, che pur avendo poco momento angolare passano molto tempo lontane dal centro. Potrebbe valere la pena di calcolare  $A(t)$  in alcuni modelli gassosi, per esempio nel modello di Lynden-Bell e Eggleton, che non ha bordo, e calcolare i flussi di densità di  $A$  per indagare se, ad esempio, ci sia un flusso di momento angolare diretto verso l'esterno. Osserviamo che nei modelli gassosi la funzione di distribuzione di singola particella è implicitamente assunta localmente Maxwelliana del tipo:

$$f(r, v) = \frac{m^{\frac{1}{2}}}{[2\pi kT(r)]^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{mv^2}{2kT(r)}} \rho(r) \quad (4.12)$$

Per una tale distribuzione si ricava che la quantità  $A$  vale:

$$A_f = \int \rho(r) r^2 kT(r) d^3r \quad (4.13)$$

Per calcolare  $A(t)$  si dovrebbero quindi sostituire in quest'ultima formula i profili di densità e temperatura trovati da Lynden-Bell e Eggleton, o da altri modelli gassosi.

### 4.3 Conclusioni

Abbiamo visto come le caratteristiche principali, in particolare i punti in cui si innesca l'instabilità, della catastrofe gravotermica siano riproducibili utilizzando un modello fluido. Il modello fluido presenta alcuni vantaggi rispetto all'approccio termodinamico basato sull'entropia di Boltzmann, il cui utilizzo non è rigorosamente giustificato. Innanzitutto le ipotesi del modello fluido sono più chiare e definite: si tratta di assumere le equazioni di Eulero dell'idrodinamica e un'equazione di stato  $P = \rho kT/m$ . Si possono così apprezzare i limiti della descrizione della catastrofe gravotermica, sia applicata ad ammassi globulari che a sistemi ideali di  $N$  particelle puntiformi autogravitanti, da un punto di vista che è più "sotto controllo" rispetto a quello termodinamico. Ad esempio parte dei limiti della descrizione sono riconducibili alla validità dell'equazione di stato, che non tiene conto del carattere attrattivo



dell'interazione (e inoltre probabilmente non è giustificato l'assumere che la pressione dipenda solo da quantità locali come la densità e la dispersione di velocità: a causa del lungo raggio di azione dell'interazione, una particella può subire forze anche da particelle che stanno molto lontane.<sup>2</sup>).

Il modello fluido permette inoltre di valutare i tempi caratteristici di collasso e la dinamica del sistema, cosa che in un approccio puramente termodinamico è preclusa.

In generale, il modello fluido appare applicabile per studiare qualsiasi sistema di particelle interagenti tramite un potenziale arbitrario come alternativa all'approccio basato sull'entropia di Boltzmann, e grazie alla maggior semplicità delle ipotesi in gioco vale la pena di considerare anche il punto di vista fluido quando si voglia studiare un problema che coinvolga l'entropia di Boltzmann. I risultati della Tesi riguardano principalmente lo studio sistematico delle equazioni idrodinamiche per vari tipi di condizioni al contorno e nello studio dei relativi modi normali (Capitolo 3).

Nel primo e nell'ultimo capitolo sono stati messi in rilievo alcuni limiti dell'applicabilità dei modelli agli ammassi globulari ed evidenziati degli aspetti interessanti tuttora non completamente chiari riguardanti la dinamica e la termodinamica dei sistemi autogravitanti. Abbiamo discusso il possibile ruolo del momento angolare nel guidare la catastrofe gravotermica e nell'interpretazione delle oscillazioni gravotermiche.

---

<sup>2</sup>Ad esempio, se si considera un volumetto con una certa densità di particelle, esso eserciterà pressioni diverse su una parete a seconda della distribuzione della materia circostante. Se la materia circostante è a simmetria sferica, allora esercita una forza totale nulla sulle particelle del volumetto; in caso contrario può invece esercitare forze che vanno a influire sulla pressione esercitata da tale volumetto.



## Conservazione Dettagliata del Momento Angolare

In questa appendice vogliamo mostrare che se si considera un sistema non collisionale a simmetria sferica, esso non può collassare nel senso che ciascuna particella si mantiene a una distanza tipica dal centro maggiore di un certo valore finito (diverso per ogni particella). Consideriamo dunque un insieme di particelle non collisionali, di masse non necessariamente identiche, e di massa totale  $M$ . La presenza o meno di un bordo fisico, purchè esso inverta la componente radiale della velocità lasciando inalterate le altre, è irrilevante ai fini dell'argomento, che vale in entrambi i casi. Supponiamo che la funzione di distribuzione abbia, al tempo zero, simmetria sferica. L'evoluzione manterrà allora la simmetria sferica ad ogni tempo. Ciascuna particella si muove quindi in un potenziale centrale che dipende però dal tempo. La lagrangiana di una singola particella si può scrivere:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) - V(r, t) \quad (\text{A.1})$$

dove  $V(r, t)$  è un potenziale che dipende dal tempo,  $t$  è il tempo,  $r$  è la distanza dal centro,  $m$  è la massa della particella,  $\theta$  è la coordinata angolare della particella (il suo moto si svolge in un piano grazie alla conservazione del momento angolare). Una tale Lagrangiana conserva il momento angolare di singola particella, dunque  $r^2\dot{\theta} = C$ , dove  $C$  è una costante. Le equazioni del moto sono:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} \Rightarrow m\ddot{r} = mr\dot{\theta}^2 - \frac{\partial V(r, t)}{\partial r} \Rightarrow \boxed{m\ddot{r} = m\frac{C^2}{r^3} - \frac{\partial V(r, t)}{\partial r}} \quad (\text{A.2})$$

Dove il termine  $\partial V(r, t)/\partial r$  è la forza che viene esercitata sulla particella. Osserviamo ora che se la massa del gas è finita ed è  $M$ , la forza è massima se le altre particelle stanno tutte a raggi minori di quella che stiamo considerando e vale  $-GMm/r^2$ , ed è minima quando stanno tutte a raggi maggiori nel qual caso vale zero. Dunque abbiamo ottenuto che l'equazione del moto per la coordinata radiale di una particella è come quella di una particella unidimensionale soggetta a una forza che è maggiore o uguale di:

$$m\frac{C^2}{r^3} - \frac{GMm}{r^2} \quad (\text{A.3})$$

e dunque una particella non si può avvicinare arbitrariamente al centro, ma deve stare a raggi maggiori di un certo raggio minimo. Così tutte le particelle che hanno un momento angolare diverso da zero devono mantenersi a una certa distanza dal centro, ma queste sono la quasi totalità delle particelle (in una distribuzione Maxwelliana di velocità, ad esempio, l'insieme delle particelle con velocità radiali ha misura nulla). Si conclude così che

- Per un gas non collisionale in una scatola, quando si considerino perturbazioni a simmetria sferica rispetto allo stato di equilibrio idrostatico il sistema non può collassare. Nel caso fluido il sistema collassava proprio per le perturbazioni che mantenevano la simmetria sferica. Si vede così una differenza sostanziale tra i due casi.
- Sia nel caso fluido che nel caso non collisionale il momento angolare *totale* è nullo. La somma dei moduli quadri dei momenti angolari di ciascun elementino è invece nullo nella visione fluida e non nullo nel caso del gas collisionale.
- Nell'argomento sopra non abbiamo mai utilizzato che il potenziale di interazione fra le particelle fosse proprio quello gravitazionale, quindi il ragionamento va bene per qualsiasi potenziale purchè non tenda a infinito troppo velocemente al tendere di  $r$  a zero (così da non superare il termine  $1/r^3$  dovuto al momento angolare).

## Una Rapida Nota sui Calori Specifici Negativi

In questa appendice vogliamo mostrare come è possibile ottenere calori specifici negativi studiando un sistema nell'ensemble microcanonico. Nell'ensemble microcanonico il sistema è considerato isolato e con una energia fissa  $E$ . Data l'hamiltoniana del sistema è possibile calcolare l'entropia del sistema, definita come il numero di stati ad energia  $E$  (se si sta considerando un sistema quantistico) oppure dalle formule (4.2) e (4.3) se si sta considerando un sistema classico. Data l'hamiltoniana otteniamo quindi la funzione  $S(E, V, N)$  (le dipendenze da  $N$  e  $V$  sono inglobate nel fatto che l'hamiltoniana dipende da  $N$  e  $V$ ).

La temperatura è definita in questo ensemble dalla seguente relazione:

$$T(E, V, N) \equiv \frac{1}{\partial S(E, V, N)/\partial E}. \quad (\text{B.1})$$

Il calore specifico è definito da:

$$C_V \equiv \frac{\partial E(T, V, N)}{\partial T} = \frac{1}{\partial T(E, V, N)/\partial E}. \quad (\text{B.2})$$

Sostituendo in quest'ultima la definizione di temperatura otteniamo:

$$C_V = - \frac{\partial^2 S / \partial E^2}{(\partial S / \partial E)^2} \quad (\text{B.3})$$

Vediamo così che il calore specifico è negativo quando  $\partial^2 S / \partial E^2 > 0$ , cioè quando l'entropia è una funzione convessa dell'energia. Per un gas ideale classico l'entropia è concava e proporzionale a  $\log E$ , dunque il calore specifico è sempre positivo. Per fare in modo che l'entropia sia convessa bisogna che per il caso classico  $\Gamma(E)$  definito dalla (4.3) sia una funzione che cresca molto velocemente (più velocemente di un esponenziale, perché per ottenere l'entropia bisogna prenderne il logaritmo), mentre per il caso quantistico che il numero di stati compresi tra due intervallini di energia aumenti molto velocemente.

Esistono esempi di sistemi giocattolo (toy models) che presentano calore specifico negativo, ma non esistono esempi in cui il calore specifico negativo si manifesta nel limite termodinamico (cioè  $N \rightarrow \infty$  e  $V \rightarrow \infty$  con  $N/V$  costante). Esempi di modelli giocattolo a cui si può applicare il calore specifico negativo sono una particella in un potenziale unidimensionale (vedi [33]), ad esempio una particella in un potenziale  $1/r$ . Questo si capisce pensando ad esempio all'atomo di idrogeno in meccanica quantistica, in cui i livelli di energia sono noti, e ci sono un numero  $n^2$  di stati per ogni energia  $E_n$  data da:

$$E_n = - \frac{m_e c^2 \alpha^2}{2n^2} \quad (\text{B.4})$$

dove  $m_e$  è la massa dell'elettrone,  $c$  la velocità della luce e  $\alpha$  la costante di struttura fine. I livelli di energia si addensano per energie prossime a zero, e questo dà luogo a calore specifico negativo vicino a questa energia (si veda ad esempio [41]). Quando un sistema si trova ad energia prossime a quelle necessarie per passare da uno stato legato a uno stato slegato, si ha un grande aumento dello spazio delle fasi disponibile per un piccolo aumento dell'energia (perché il sistema passa dall'essere confinato in una regione di spazio ad avere tutto lo spazio a sua disposizione) o un addensamento di livelli se si pensa a un sistema quantistico, e dunque queste sono le situazioni tipiche in cui si può trovare calore specifico negativo.

# Appendice C

## Equilibri Idrostatici con Potenziali Generici

In questa appendice vogliamo ricavare l'equazione che descrive il profilo di densità di un fluido con equazione di stato  $P = \rho kT/m$  ( $T$  parametro costante) in cui le varie parti di fluido interagiscono tramite un potenziale a due corpi arbitrario.

Prendiamo come forza tra due “masse” puntiformi la seguente:

$$F(r) = m_1 m_2 f(r) \quad (\text{C.1})$$

La forza prodotta da un anellino di materia di densità uniforme (vedi figura C.1) lungo l'asse è:

$$dF = dM m f(s) \cos \phi \quad (\text{C.2})$$

Dove  $dM$  è la massa di un anellino, e vale:

$$dM = \frac{1}{2} M \sin \theta d\theta. \quad (\text{C.3})$$

La forza totale esercitata da un guscio di massa  $M$  su una massa  $m$  come nelle figura, è:

$$F_{\text{guscio}} = \frac{mM}{2} \int f(s) \cos \phi \sin \theta d\theta. \quad (\text{C.4})$$

Si vede da relazioni trigonometriche che valgono le seguenti:

$$\cos \phi = \frac{r^2 + s^2 - R^2}{2rs}, \quad (\text{C.5})$$

$$\sin \theta d\theta = \frac{s}{rR} ds, \quad (\text{C.6})$$

per cui la forza prodotta da un guscio di massa  $M$  e raggio  $R$  a una distanza  $r$  dal centro del guscio è:

$$F_{\text{guscio}}(r, R) = \frac{mM}{4} \frac{1}{r^2 R} \int_{r-R}^{r+R} f(s) (r^2 - R^2 + s^2) ds \equiv mMg(r, R) \quad (\text{C.7})$$

Supponiamo ora di avere una palla di raggio  $R$  piena di una certa densità  $\rho(r)$  (attenzione a non confondersi con la notazione di prima) e di volerne imporre l'equilibrio idrostatico. Ad un certo raggio  $r$  la forza esercitata da un guscio che si trova a un raggio  $x$  su una massa  $m$  è:

$$dF = m 4\pi x^2 \rho(x) dx g(r, x) \quad (\text{C.8})$$

La forza totale sulla massa  $m$  posta a  $r$  dovuta a tutti gli altri strati quando c'è una certa densità  $\rho$  è quindi

$$F_\rho \equiv m g_\rho(r) = 4\pi m \int_0^R g(r, x) \rho(x) x^2 dx \quad (\text{C.9})$$

L'equilibrio idrostatico richiede che la forza dovuta ai gusci debba essere sostenuta dalla pressione. Ciò si traduce in:

$$\frac{dP}{dr} = -\rho(r) g_\rho(r) \quad (\text{C.10})$$

Prendendo la solita equazione di stato  $P = \rho \frac{kT}{m}$  e sostituendoci le relazioni precedenti otteniamo:

$$\frac{kT}{m} \frac{d\rho}{dr} = -4\pi \rho(r) \int_0^R g(r, x) \rho(x) x^2 dx \quad (\text{C.11})$$

Dove

$$g(r, x) = \frac{1}{4r^2 x} \int_{r-x}^{r+x} f(s) (r^2 - x^2 + s^2) ds. \quad (\text{C.12})$$

Per trovare il profilo di densità si tratta quindi di risolvere un'equazione integrale. Osserviamo che, nel caso di potenziali che sono somma di  $r^p$ , dove  $p$  è un numero intero, la funzione  $g(r, x)$  è semplice da calcolare.

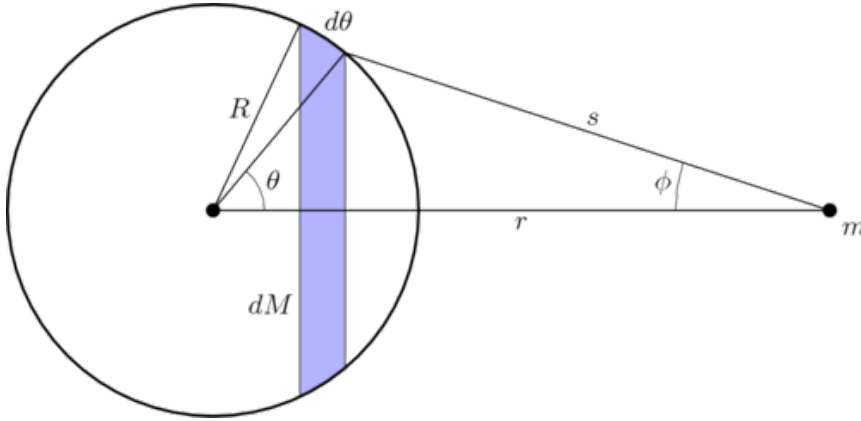


Figura C.1: Figura illustrativa, presa da Wikipedia.



# Bibliografia

- [1] Antonov, V. A., *Most Probable Phase Distribution in Spherical Star Systems and Conditions for Its Existence*, IAU Symposium, No. 113, 1985, p.525; Traduzione dell'originale in russo Vest. Leningrad Univ. 7, 135 (1962)
- [2] Bertin, G., *Dynamics of Galaxies*, Cambridge Univ. Press (2001)
- [3] Binney, J., Tremaine, S., *Galactic Dynamics* 2nd ed., Princeton Univ. Press (2008)
- [4] Bonnor, W. B., *Boyle's Law and Gravitational Instability*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 116, 351 (1956)
- [5] Breen, P. G., Heggie, D. C., *Gravothermal Oscillations in Two-Component Models of Star Clusters*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 420, 309 (2012)
- [6] Campa, A., Dauxois, T., and Ruffo, S., *Statistical mechanics and dynamics of solvable models with long-range interactions*, Phys. Rept. 480, 57 (2009)
- [7] Chavanis, P. H., *Gravitational Instability of Finite Isothermal Spheres*, Astron. and Astroph., v.381, p.340-356 (2002)
- [8] Chavanis, P. H., *Gravitational Instability of Isothermal and Polytopic Spheres*, Astron. and Astroph., v. 401 (2003)
- [9] Chandrasekhar, S., *An Introduction to the Study of Stellar Structure* Dover Publications (2010), ristampa del lavoro pubblicato originariamente nel 1939
- [10] Chandrasekhar, S., *Principles of Stellar Dynamics* Dover Publications (2010), ristampa del lavoro pubblicato originariamente nel 1942
- [11] Djorgovski, S. G., *The Dynamic Lives of Globular Clusters*, Sky and Telescope Vol. 96, N. 4, p. 38 (1998)

- [12] Ebert, R., *Über die Verdichtung von H I-Gebieten*, Zeitschrift für Astrophysik 37, 217 (1955)
- [13] Heggie, D., Hut, P., *The Gravitational Million-Body Problem*, Cambridge Univ. Press (2003)
- [14] Inagaki, S., *The Gravo-thermal Catastrophe of Stellar Systems*, Pub. Astr. Soc. of Japan, 32, 213 (1980)
- [15] Jaynes, E. T., *Gibbs vs Boltzmann Entropies*, Amer. J. Phys. 33 391 (1965)
- [16] Jaynes, E. T., *The Gibbs Paradox*, Maximum-Entropy and Bayesian Methods, G. Erickson, P. Neudorfer, and C. R. Smith (eds.), Kluwer, Dordrecht (1992)
- [17] Katz, J., *On the Number of Unstable Modes of an Equilibrium*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 183, 765 (1978)
- [18] Katz, J., *On the Number of Unstable Modes of an Equilibrium - II*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 189, 817 (1979)
- [19] Katz, J., *Thermodynamics and Self-Gravitating Systems*, J. Found.Phys. 33, 223 (2003)
- [20] Kim, S. S., Lee, H. M., Goodman, J., *Two-Component Fokker Planck Models for the Evolution of Isolated Globular Clusters*, Astr. J. 495, 786 (1998)
- [21] King, I. R., *The Structure of Star Clusters. III. Some Simple Dynamical Models*, Astron. J. 71, 64 (1966)
- [22] Landau, L. D., Lifshitz, E. M., *Fluid Mechanics, Second Edition*, Butterworth-Heineman (1987)
- [23] Lightman, A. P., *Enhancement of the Gravo-thermal Catastrophe in Two-Component Isothermal Spheres*, Astr. J. 215, 914
- [24] Lynden-Bell, D., and Wood, R., *The Gravo-Thermal Catastrophe in Isothermal Spheres and the Onset of Red-Giant Structure for Stellar Systems*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 138, 495 (1968)
- [25] Lynden-Bell, D., and Eggleton, P. P., *On the Consequences of the Gravo-thermal Catastrophe*, Mon. Not. R. Astr. Soc. 191, 483 (1980)
- [26] Lynden-Bell D., *Negative Specific Heat in Astronomy, Physics and Chemistry*, Physica A: Stat. Mec. and its App. 263, 293 (1999)

- [27] Lombardi, M., Bertin, G., *Boyle's Law and Gravitational Instability*, Astron. and Astroph. 375, 1091 (2001)
- [28] Makino, J., *Postcollapse Evolution of Globular Clusters*, Astr. J. 471, 796 (1996)
- [29] Makino, J., *Gravothermal Oscillations*, Proceedings of the 174th Symposium of the Int. Astr. Union, Kluwer Academic Publishers, p. 151. (1996)
- [30] Merritt, D., *Two-Component Stellar Systems in Thermal and Dynamical Equilibrium*, Astr. J. 86, 318 (1981)
- [31] Nakada, Y., *On the Gravothermal Catastrophe* Publ. Astron. Soc. Japan 30, 57 (1980)
- [32] Padmanabhan, T., *Antonov Instability and Gravothermal Catastrophe - Revisited*, Astr. J. Supp., 71:651-664 (1989)
- [33] Padmanabhan, T., *Statistical Mechanics of Gravitating Systems*, Phys. Rept. 188 , 285 (1990)
- [34] Padmanabhan, T., *Statistical Mechanics of Gravitating Systems ... and some curious history of Chandra's rare misses!*, Pramana 77, 147 (2011)
- [35] Semelin, B., Sánchez, N., de Vega, H. J., *Self-gravitating Fluid Dynamics, Instabilities, and Solitons*, Phys. Rev. D 63, 8 (2001)
- [36] Spitzer, L., *Equipartition and the Formation of Compact Nuclei in Spherical Stellar Systems*, Astr. J. 158, 139 (1969)
- [37] Spitzer, L., *Dynamical Evolution of Globular Clusters*, Princeton Univ. Press (1987)
- [38] Sugimoto, D., Bettwieser, E., *Post-Collapse Evolution and Gravothermal Oscillation of Globular Clusters*, Mon. Not. R. Ast. Soc. 208, 493 (1983)
- [39] Sugimoto, D., Hachisu, I., *Gravothermal Catastrophe and Negative Specific Heat of Self-Gravitating Systems*, Prog. of Th. Phys. 60, 123 (1978)
- [40] Taff, L. G., Hansen, C. J., Ross, R. R., van Horn, H. M. *Finite, Two-Component Isothermal Spheres. I - Equilibrium models*, Astr. J. 197, 651 (1975)
- [41] Thirring, W., *Systems with negative specific heat*, Zeitschrift für Physik 235, 339 (1970)
- [42] Yabushita, S., *Jeans's Type Gravitational Instability of Finite Isothermal Gas Spheres* Mon. Not. R. Ast. Soc. 140, 109 (1968)

- [43] Yoshizawa, M., Inagaki, S., Nishida, M. T., Kato, S., Tanaka, Y., Watanabe, Y., *The Equilibrium Series and the Secular Stability of Isothermal Two-Component Star Clusters*, Pub. Astr. Soc. of Japan 30, 279 (1978)
- [44] Watters, W. A., Joshi, K. J., Rasio, F. A., *Thermal and Dynamical Equilibrium in Two-Component Star Clusters*, Astr. J. 539, 331 (2000)